Ferdetengelyű szögtartó hengervetületek hossztorzulásának vizsgálata

Juhász Péter
MTA SZTAKI

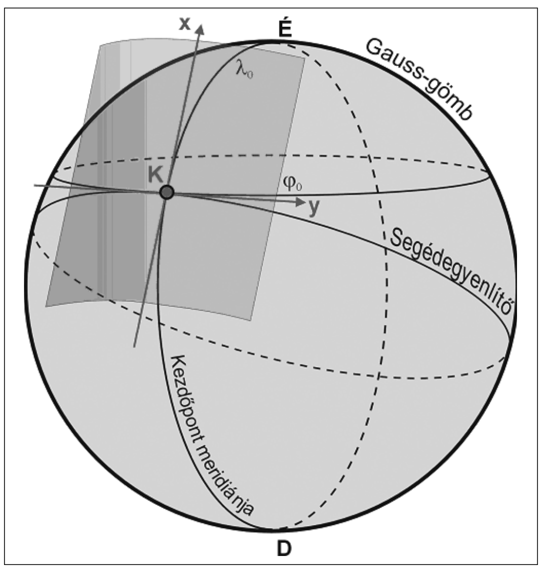
1. Bevezetés

A geodéziában és topográfiában használatos térképek vetületétől általában elvárják a szögtartást, illetve hogy a hossztorzulások a lehető legkisebbek legyenek. A hossztorzulást a *lineármodulussal* jellemezzük, amely a hossz változatlansága esetén 1, hosszrövidülés esetén 1-nél kisebb, hossznagyobbodás esetén 1-nél nagyobb érték. A *Fasching Antal* által megfogalmazott elméletileg elvárt érték a lineármodulus 1-től való eltérésének *maximumára* 1/10 000 [*Fasching*]. Ezen kívül természetesen vannak egyéb fontos követelmények is: legyen a lineármodulus, az irányredukció és a vetületi meridiánkonvergencia számítására alkalmas képlet.

A 20. század elején, a kataszteri térképezéshez bevezetett, *Fasching Antal* nevéhez fűződő rendszerekben (HÉR, HKR, HDR) is ferdetengelyű, szögtartó hengervetületeket alkalmaztak, illetve az egységes országos vetületben (EOV) is fontos szerepet játszik ez a konstrukció [*Varga*]. Ezek a vetületek ún. „kettős vetítésen'' alapulnak [*Bugayevskiy, Snyder*, 1995]: az ellipszoidról első lépésben egy minimális hossztorzulású gömbvetülettel térünk át a megfelelő Gauss-gömb felületére, majd a gömbről a síkra ferdetengelyű, szögtartó hengervetülettel. Mindkét lépés szögtartó módon van megvalósítva, így a két leképezés együttesen is szögtartó. Mivel Magyarországon 1975-ben az EOV-t rendszeresítették [MÉM OFTH, 1975], ezért a hossztorzulási viszonyok vizsgálatát erre a vetületre fókuszáltam.

Tekintsük adottnak ezeket az alapelveket Magyarország területének topográfiai ábrázolásához. Vannak azonban a vetületnek olyan paraméterei, amelyek módosíthatók anélkül, hogy a vetület alapvető tulajdonságai megváltoznának. Mind a Fasching-féle ferdetengelyű, szögtartó hengervetület, mind pedig az EOV esetén ezeket a paramétereket valamilyen módon rögzítették konkrét értékekkel, de felmerül a kérdés, hogy ha pusztán a fenti feltétel teljesítése a cél, akkor találhatunk-e kedvezőbb paramétereket.

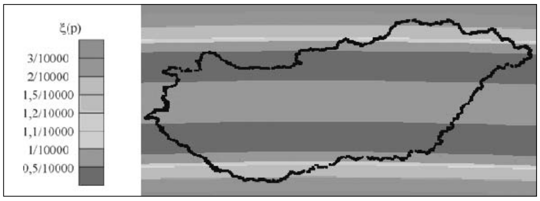
Mik is ezek a paraméterek? A gömbvetület esetén egyetlen paraméter van, a normálszélesség (ld. Függelék). A hengervetület esetén szintén a Függelékben található képletek alapján 3 paraméterről beszélhetünk. Az egyik az **m**-mel jelölt vetületi méretarány-tényező, amit 1-nél kisebbnek választva az „érintő'' elhelyezésű hengervetületből „metsző'' elhelyezésű lesz. A másik két paraméter a segédegyenlítő és a segéd-kezdőmeridián (ami egyben egy valódi meridián is) térképi metszéspontjában elhelyezkedő vetületi kezdőpont (*1. ábra*) két földrajzi (gömbi) koordinátája (φ_0 a szélessége, λ_0 a hosszúsága) [*Györffy*].



1. ábra A vetületi kezdőpont valódi hengervetületeknél

Esetünkben egy paraméterhármast akkor tekinthetünk jobbnak egy másiknál, ha a közös ábrázolt területen kisebb a lineármodulus 1-től való eltérésének maximuma. Ez az érték fejezi ki ugyanis a legegyszerűbben azt, hogy a legkedvezőtlenebb helyen mennyire *nem* hossztartó a vetület.

Az EOV esetén ez az érték kicsit nagyobb, mint 2,5/10000. Az ország északkeleti határszakaszán található a vetületnek az a pontja, ahol a lineármodulus értéke felveszi a maximumát (*2. ábra*).



2. ábra Az EOV hossztorzulási viszonyai

Ennek fényében jogos a kérdés, hogy a paraméterek más megválasztásával nem csökkenthetők-e jelentősen a hossztorzulások. Vizsgálataim során az derült ki, hogy ha csak az említett paramétereket változtatjuk, vagyis a vetület alapvető szerkezetét megtartjuk, akkor is lényegesen javíthatunk a 2,5/10000-en. Konkrétan *ezt az értéket kevesebb mint a felére, 1,12/10000 alá lehet csökkenteni*, ami már éppen hogy csak meghaladja az elméletileg elvárt 1/10000-et. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy egy ilyen módosított vetületi rendszer bevezetése indokolt lenne, hiszen sok egyéb szempont szól az EOV további alkalmazása mellett.

2. A vizsgálat módszere

A hossztorzulások vizsgálatának lefolytatásához szükségem volt az országhatár pontjainak alapfelületi koordinátáira. A FÖMI kutatási és oktatási célokra az ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék rendelkezésére bocsátott egy 2885 pontból álló adatbázist, mely tartalmazza Magyarország határpontjainak EOV-koordinátáit. Ez a valódi országhatár pontjainak egy olyan ritkított halmaza, amelyre igaz, hogy maguk a határpontok 1 m élességgel adottak, illetve a határ minden pontja legfeljebb 20 m-re van a határpontok által kifeszített töröttvonaltól. Első lépésben ezt az adatbázist felhasználva számítottam ki a határpontok ellipszoidi (IUGG '67) koordinátáit.

Az optimális vetületek megtalálása többváltozós valós függvények szélsőértékének keresését jelenti. A változók a vetület paraméterei, a függvényérték pedig az így kapott vetület esetén adódó lineármodulusok 1-től való eltérésének maximuma Magyarország területén.

Ezek alapján az optimalizálást a Nelder-Mead-féle ún. „downhill simplex'' módszerrel végeztem [*Nelder, Mead*, 1965].

Tekintsük rögzítettnek, hogy az ábrázolandó terület Magyarország területe és vezessük be a következő jelölést. Mivel az EOV alapfelülete az IUGG '67 ellipszoid, így erről az ellipszoidról a síkra képező szögtartó f függvény esetén jelölje $\xi_f(p)$ a p pontban fellépő lineármodulus 1-től való eltérésének abszolút értékét, ξ^*_f pedig ezeknek az értékeknek a maximumát Magyarország területén.

3. A gömbvetület paramétere

A gömbvetületnek egyetlen paramétere van, ami befolyásolja a maximális hossztorzulást, ez pedig a normálparalelkör. A normálparalelkört az EOV esetében az ellipszoidon 47°10'-nek választották. Ebben az esetben a maximális hossztorzulás értéke

$$l_{max} = 1{,}00000003435.$$

A normálparalelkört megváltoztatva csak minimális javulás érhető el. Az egyváltozós függvény szélsőértékét egyszerű numerikus módszerekkel megállapítva adódik, hogy a normálszélesség

$$\Phi_0 = 47{,}161433275°,$$

értéke esetén kapjuk az optimumot. Amint látható, a Φ_0 értéke alig tér el az eredetileg választott 47,16°-tól, a maximális hossztorzulás értéke pedig 1,00000003418-ra csökken.

Összefoglalva tehát a gömbvetület normálparalelkörének szélessége nagyon csekély mértékben változtatja meg a torzulási viszonyokat, de a továbbiakban az itt kapott legjobb értéket felhasználva folytatom az optimalizálást.

4. A hengervetület paramétereinek optimalizálása

Az előző fejezetben kapott eredményből következik, hogy lényeges javulást csak a hengervetület paramétereinek optimális megválasztásától várhatunk.

A hengervetület bevezetőben tárgyalt három paraméterét eredetileg a következő módon választották meg: m = 0,9993, φ_0 = 47,1°, illetve λ_0 = 0°. Ezek mellett a paraméterek mellett a maximális hossztorzulás értéke:

$$l_{max} = 1{,}00025620752.$$

Egy negyedik, módosítható paraméternek tekinthetnénk a kezdőmeridián azimutját, vagyis hogy a kezdőmeridiánt elforgatjuk a jelenlegi északi irányhoz képest, így nem tartjuk be azt a konvenciót, hogy a segéd-kezdőmeridián áthalad az Északi-sarkon. Ekkor tehát ez a segédmeridián nem lenne valódi meridián.

Érdemes azonban észrevenni, hogy ez nem eredményez új szabadsági fokot. Ha ugyanis adott egy tetszőleges vetületi kezdőpont és egy azimut, amivel a segéd-kezdőmeridián eltér az északi iránytól, akkor ehhez létezik olyan vetületi kezdőpont Északi-sarkon áthaladó kezdőmeridiánnal, aminek esetén a szokásos segédegyenlítő épp az előző konstrukcióban létrejövő segédegyenlítővel esik egybe. Márpedig *a segédegyenlítők egybeesése esetén a torzulási viszonyok megegyeznek*. Ennek oka, hogy a hengervetület lineármodulusa csak a segédszélességtől függ (arányos 1/cosφ'-vel). Ezek alapján a feladat arra a kérdésre egyszerűsödik, hogy hogyan kell megválasztani a redukciós tényezőt és a vetületi kezdőpont koordinátáinak értékét, hogy ξ^* minimális legyen.

4.1. A vizsgálat eredménye

A háromváltozós függvény szélsőértékének meghatározása tehát a feladat. A legkedvezőbb hossztorzulást akkor kapjuk, ha

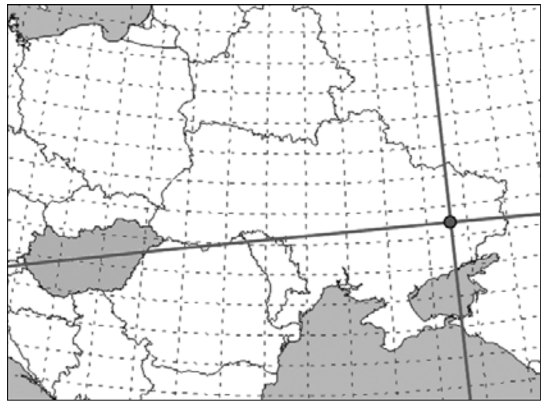
$$m = 0{,}9998886587,$$
$$\varphi_0 = 48{,}4205621109°,$$
$$\lambda_0 = 17{,}7071567991°.$$

Ezt a λ_0-t persze úgy kell érteni, hogy az eredeti (gellérthegyi) kezdőmeridiánhoz képest ennyivel kell keleti irányban elmozgatni a kezdőpontot. Ebben az esetben a hossztorzulás értékének 1-től való maximális eltérése:

$$\xi^*_{f0} = 0{,}00011133912898.$$

Az így kapott kezdőpont Kelet-Ukrajnában található (*3. ábra*).

Ez tehát azt jelenti, hogy a redukált, ferdetengelyű, szögtartó hengervetületben az eredetileg több mint 2,5/10000-es értéket egészen 1,12/10000 alá lehet csökkenteni úgy, hogy a vetület alapvető jellegét és az alapfelületet nem változtatjuk meg.

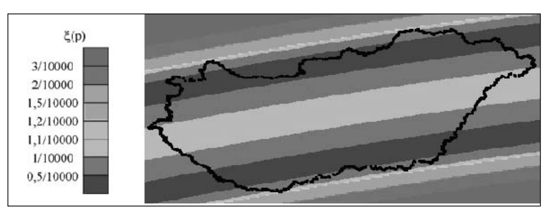


3. ábra Az új vetületi kezdőpont és a segédegyenlítő elhelyezkedése

4.2. A kapott vetület elemzése

Érdemes megvizsgálni a kapott vetületet. Ha csak azt vesszük figyelembe, hogy ξ^* értéke minimális legyen, akkor kétségkívül ez a legkedvezőbb megoldás. Azonban látva a vetület torzulási grafikonját (*4. ábra*) felmerülhetnek egyéb szempontok is. Ez a vetület ugyanis az ország területének középső sávjában nem teljesíti az 1/10000-es feltételt, míg az EOV ezt teljesítette. Sőt az izovonalas térképeken az is látszik, hogy az új vetület kisebb területen teljesíti az 1/10000-es feltételt, mint az EOV.

Ezeknek az észrevételnek megfelelően négy további esetet vizsgálok meg. Az egyik az az egyszerű eset, amikor a vetületi kezdőpontot nem változtatjuk. A másodikban a vetületi méretarány-tényezőt 1-nek választjuk. Ekkor a segédegyenlítőtől távolodva egyre nőnek a hengervetület hossztorzulási értékei. (Ezt minimálisan módosítja a gömbvetület által hozzáadott torzulás.) A harmadik esetben az optimum keresésénél azt tűzzük ki célul, hogy az ország „belső'' területén a vetület mindenképpen feleljen meg az 1/10000-es követelménynek. A negyedik esetben pedig egy olyan vetületet próbálunk találni, ami nem annyira kedvező a ξ^* értékét tekintve, viszont az ország területének jelentős részén a



4. ábra A $\xi_{f0}(p)$ értékei az optimális vetület esetén hossztorzulás nemhogy 1/10000 alatt van, hanem a 0,5/10000-et sem haladja meg.

4.3. Ha a kezdőpontot nem módosítjuk

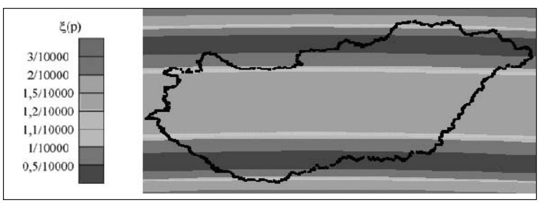
Természetes kérdésként merül fel, hogy mi ξ^* legkedvezőbb értéke abban az esetben, ha a vetületi kezdőpontot nem módosítjuk. Ekkor csak a vetületi méretarány-tényező marad paraméterként, vagyis ismét egy egyváltozós szélsőérték problémához jutunk. Ezt numerikus módszerekkel megoldva kapjuk, hogy

$$m = 0{,}99983691382346$$

esetén lesz optimális ξ^* értéke, és ekkor

$$\xi^*{}_{f_1} = 0{,}000016308744726801.$$

Ez azt jelenti, hogy már a vetületi méretarány-tényező optimalizálásával jelentős javulást lehet elérni. A pontos hossztorzulási viszonyokat az *5. ábra* mutatja.



5. ábra A $\xi_{f_1}(p)$ értékei, ha a kezdőpontot nem módosítjuk

4.4. Ha a vetületi méretarány-tényező 1

A második esetben tehát rögzítsük az $m = 1$ értéket. Ez azért érdekes, mert ekkor a „vetítés'' második lépésében a jól ismert Mercator-vetület ferdetengelyű változatát alkalmazzuk.

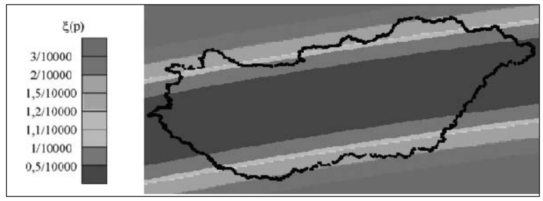
Ekkor tehát mindössze a kezdőpont koordinátáit kell optimálisan megválasztani. Ezt az alábbi paraméterekkel érhetjük el a legkedvezőbben:

$$\varphi_0 = 48{,}4192503398445°,$$
$$\lambda_0 = 17{,}6994454187773°.$$

Ekkor

$$\xi^*{}_{f_2} = 0{,}000222699987314057.$$

Ebből látható, hogy ennek a verziónak mindösszesen annyi az előnye, hogy a Mercator-vetületet alkalmazzuk, hiszen $\xi^*{}_{f_1}$ értéke alig kedvezőbb, mint az EOV esetében. A hossztorzulási viszonyokat az *6. ábra* mutatja.



6. ábra A $\xi_{f_2}(p)$ az m = 1 esetben

4.5. Az ország középső területére koncentrálva

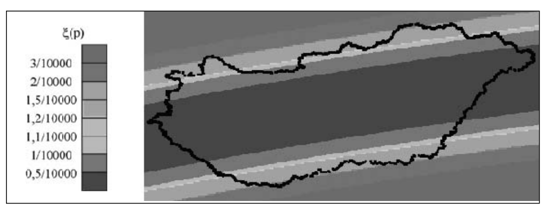
A harmadik esetben azt szeretnénk elkerülni, amit az optimális vetület esetén tapasztaltunk, nevezetesen, hogy az ország középső sávjában (a hengervetület segédegyenlítője környékén) $\xi(p)$ értéke meghaladja az 1/10000-et. A vetületi kezdőpontot meghagyva, csak a redukciós tényezőt változtatva ezt az alábbi paraméterekkel érhetjük el úgy, hogy a ξ^* értéke alig romlik az optimálishoz képest:

$$m = 0{,}9999000005,$$
$$\varphi_0 = 48{,}4205621109°,$$
$$\lambda_0 = 17{,}7071567991°.$$

Ekkor

$$\xi^*{}_{f_3} = 0{,}000122683466271312.$$

A hossztorzulási viszonyokat a *7. ábra* mutatja.



7. ábra Az ország középső területén a $\xi_{f_3}(p)$ értéke 1/10000 alatt marad

4.6. Nagy területen nagyon kedvező vetület

A negyedik esetben egy olyan vetület adódik, amelynek az a szerencsés tulajdonsága van, hogy az ország területének nagy részén a lineármodulus 1-től való eltérése 0,5/10000 alatt marad. Ennek persze az az ára, hogy ξ^* értéke nem annyira kedvező. Javaslatom az alábbi paraméterhalmaz:

$$m = 0{,}99995,$$
$$\varphi_0 = 48{,}4205621109°,$$
$$\lambda_0 = 17{,}7071567991°.$$

Ekkor

$$\xi^*_{f4} = 0{,}000172694101421733.$$

Vagyis jelentősen megnőtt ξ^* értéke. A hossztorzulási viszonyokat a *8. ábra* mutatja.

8. ábra Az ország nagy részén a ξ_{f4} (p) értéke 0,5/10000 alatt marad

5. Konklúzió

A vizsgálat eredményeit a következőképpen lehet összefoglalni:

- A gömbvetület paraméterét nem érdemes megváltoztatni, mert az optimalizálással elért javulás elenyésző.
- Ha a hengervetületnél csak a vetületi méretarány-tényező értékét optimalizáljuk, akkor is jelentős javulást tapasztalunk.
- Ha ezen kívül még a vetületi kezdőpontot is elmozgatjuk és optimális helyen vesszük fel, akkor a lineármodulus 1-től való eltérésének maximuma az eredetihez képest kevesebb mint a felére csökkenthető.

FÜGGELÉK – az EOV vetületi egyenletei

A gömbvetület egyenletei

Jelölje Φ_n az ellipszoidi, míg φ_n a gömbi normálparalelkör szélességét, e az ellipszoid numerikus excentricitását, e' pedig a második excentricitását, M a meridián görbületi sugarát, N pedig a harántgörbületet.

$$tg\Phi_n = \sqrt{1+e'^2\cos^2\Phi_n}\,tg\varphi_n$$
$$n\sin\varphi_n = \sin\Phi_n$$
$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right) = Ktg^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\Phi_n}{1+e\sin\Phi_n}\right)^{\frac{ne}{2}}$$
$$R = \sqrt{M(\Phi_n)N(\Phi_n)}$$

Ha Φ_n-t rögzítjük, akkor ezek alapján megkapjuk a többi paraméter értékét is. Ez

$$\Phi_n = 47°\ 7' = 47{,}16°$$

esetén az alábbiakat adja:

$$\varphi_n = 47°\ 7'\ 20{,}0578'' = 47{,}122238277°,$$
$$n = 1{,}0007197049$$
$$K = 1{,}0031100083$$
$$R = 6379743{,}001 \text{ m}$$

A hengervetület egyenletei

Felhasználva a gömbvetületnél kapott simulógömb sugarát, illetve az EOV-hez választott

$$m = 0{,}99993$$

értéket, a vetületi egyenletek a következők:

$$x = Rm\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}\right)$$
$$y = Rm\lambda'$$

ahol φ', illetve λ' a segédföldrajzi koordinátái a megfelelő pontoknak. Ezeket a

$$\sin\varphi' = \cos\varphi_0\sin\varphi - \sin\varphi_0\cos\varphi\cos\lambda$$
$$\sin\lambda' = \frac{\cos\varphi\sin\lambda}{\cos\varphi'}$$

képletekkel kaphatjuk meg [*Stegena*, 1988]. A ferdetengelyű, érintő, szögtartó vetület (HÉR, HKR, HDR) vetületi egyenletei megegyeznek ezzel, azzal a kis különbséggel, hogy ott $m = 1$.

IRODALOM

Lev M. Bugayevskiy–John P. Snyder: Map Projections – A Reference Manual Taylor&Francis, 1995, London

Fasching Antal: A magyar országos háromszögelések és részletes felmérések új vetületi rendszerei; A M. Kir. Pénzügyminisztérium megbízásából kiadta Fasching Antal, 1909, Budapest

Györffy János: Rendszeres vetülettan http://mercator.elte.hu/gyorffy/jegyzete/kepzetes/kepzetes.html

Mezőgazdasági és Élelmezésügyi Minisztérium Országos Földügyi és Térképészet Hivatal: Vetületi Szabályzat az Egységes Országos Vetületi Rendszer alkalmazására Szabályzat, 1975, Budapest

Nelder, J. A.–Mead, R.: A Simplex Method for Function Minimization, Computer Journal Vol 7., pp 308–313., 1965.

Stegena Lajos: Vetülettan Tankönyviadó, 1988, Budapest

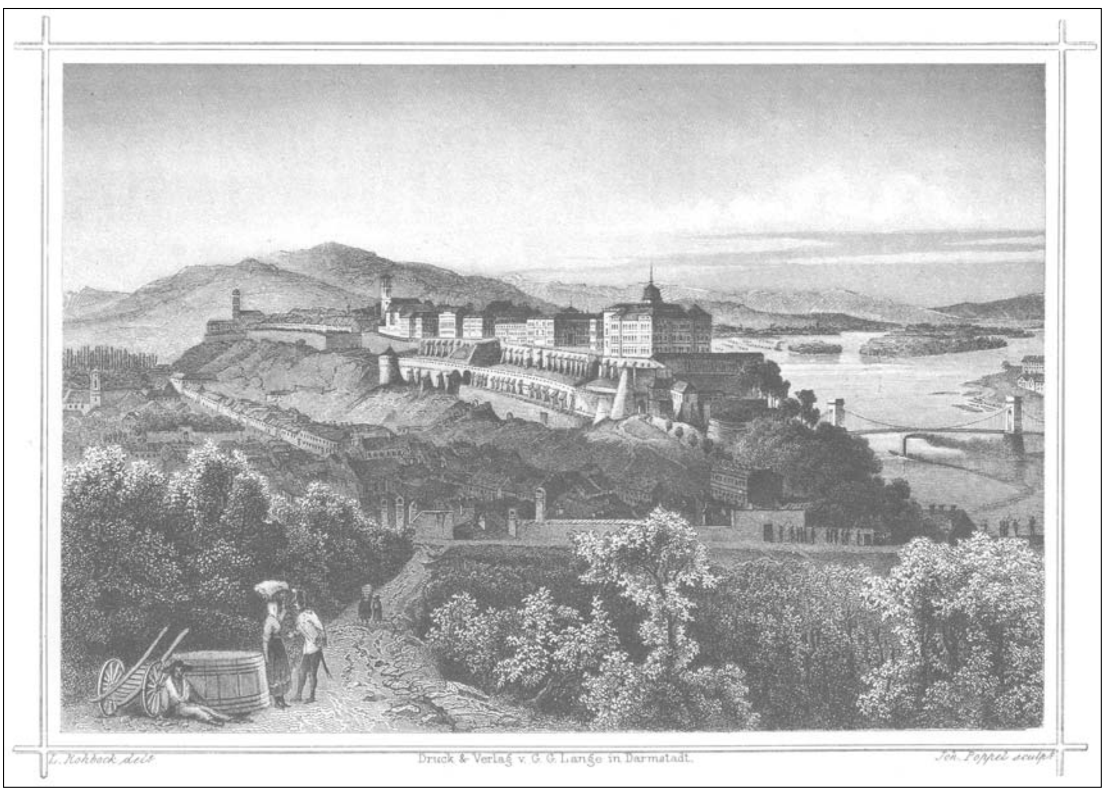
Varga József: A vetületnéküli rendszerektől az UTM-ig http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm

Linear distortion of oblique conformal cylindrical projections

Juhász, P.

Summary

Oblique conformal cylindrical projections played and play an important part in topographic mapping in Hungary. They are used as second projection of a Gauss system (double projection). A Gauss system has several parameters depending on the second part of it. This article examines these parameters, finds the best parameterset to minimize the maximum of the linear distortion on the represented area. In addition the author suggests some other possible parametersets, which ensure favorable linear distortion on the area of Hungary.



Budavár és Krisztinaváros
(Magyarország és Erdély eredeti képekben, Darmstadt 1856; Lange Gusztáv György)