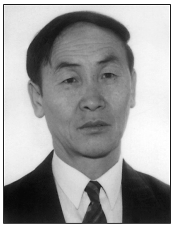

C. F. Gauss: Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum: A hibaelmélettől a valószínűségelméletig

II. rész

Dr. Monhor Davaadorzsín egyetemi docens,
NYME Geoinformatikai Kar

4. A *Theoria Combinationis* hozzájárulása a várható érték és szórás fogalom kialakulásához

A tudománytörténeti irodalomban található számos olyan tanulmány (pl., [29]), amelyek foglalkoznak a statisztikában sűrűen szóba kerülő *mintaközép* fogalmának kialakulásával. Viszont, érdekes módon, tudomásom szerint nem foglalkoztak a valószínűségelméletbeli értelemben vett *várható érték* fogalom kialakulásának történetével. A forrás irodalmát tanulmányozva, a következőket állapítottam meg. *Laplace* [20] könyvében nem találtam meg a *várható érték* tárgyalását. Ennél sokkal későbbi, igen részletes és terjedelmes valószínűségelméleti tankönyv a *Czuber* [8] könyve. E könyvben is hasonló a helyzet. *Csebisev* [5] angol nyelvi fordításában a következő olvasható: „ … If we agree to speak of the mathematical expectation of any magnitude as the sum of all the values which it may assume multiplied by the respective probabilities, …" („…Amennyiben megállapodunk, hogy tetszőleges „Magnitude" [itt „magnitude" a valószínűségi változót jelenti] matematikai várható értékeként a "Magnitude" minden egyes lehetséges értékét hozzátartozó valószínűségével szorozva kapott tagok összegét értjük, akkor …"). Rövidség kedvéért, itt nem idézzük a teljes mondatot, hanem csak azon részét, amely a *várható érték* fogalomra vonatkozik. A szóban forgó mondatrészből két dologra lehet következtetni: (i) abban a speciális esetben, amikor egy valószínűségi változó csak véges számú lehetséges értékekkel rendelkezik, akkor *Csebisev* szabályos módon adja a *várható érték* definicióját; (ii) *Csebisev* feltételes formában megfogalmazta a fenti definiciót, s ebből az is következik, hogy a definició nem volt egy teljesen elfogadott illetve egy szokásos dolog; (iii) e két következtetéshez még hozzá kell tenni, hogy *Laplace* és *Gauss* valószínűségi munkáitól teljesen eltérő módon *Csebisev* dolgozatában egyetlen egyszer se szerepel a hiba illetve a mérési hiba kifejezés. A mérési hiba helyett *Csebisev* a „Magnitude" (mennyiség, terjedelem) illetve „Quantity" (mennyiség) kifejezéseket használja. Ez azt jelenti, hogy Csebisev nem a hibaelmélettel, hanem egy magától valószínűségelmélettől fakadó kérdéssel foglalkozott. Ha azonban az ember azt gondolná, hogy a valószínűségi változót „szimbolizáló" mérési hiba helyett egy matematikai fogalom már is megjelent, ez tévedés lenne, hiszen *Csebisev* a diszkrét valószínűségi változó véges speciális esetével foglalkozott. Viszont, ahogyan előző paragrafusban részletesen kifejtettük, *Gauss* a valószínűségi változót tejességgel definitív módon vezette be a hibaelmélet „nyelvén". Ezután, *Gauss* a „*Theoria Combinationis"* 6. paragrafusában a következőképpen foglalkozik a *várható értek* és a *szórás* definitív bevezetésével: „ The integral $\int x\varphi x.\mathrm{d}x$, the mean value of x, indicates the presence or absence of constant error, as well as its magnitude. Similarly, the integral $\int xx\varphi x.\mathrm{d}x$ taken from $x = -\infty$ to $x = +\infty$ (the mean square of x) seems the most appropriate to generally define and quantify the uncertainty of observations. Thus, given two systems of observations which differ in their likelihood, we will say that the one for which the integral $\int xx\varphi x.dx$ is smaller is the more precise." (Az $\int x\varphi x.dx$ integrál, amely az x középértéke, megmutatja az állandó hiba jelenlétet vagy hiányát, valamint annak nagyságát. Hasonlóképpen, úgy tűnik, hogy az $\int xx\varphi x.dx$ integrál, amely $x = -\infty$-tól $x = +\infty$-ig terjed, (az x kvadratikus középértéke) a legalkalmasabb a mérések bizonytalanságának számszerűsítésére illetve általános definiálására. Következésképpen, valószínűségi értelemben egymástól eltérő két mérési rendszerben, azt mondhatjuk, hogy az a pontosabb, amelynél az $\int xx\varphi x.dx$ integrál értéke kisebb."). Ezek az idézetek a hozzá kapcsolódó kifejtéseimmel egyetemben világosan megmutatják, hogy *Gauss* már szigorú matematikai definícióként vezetette be a valószínűségelméleti értelemben vett *várható érték* és *szórás* fogalmakat.

5. Csebisev-egyenlőtlenség eredete és annak geodéziai, illetve hibaelméleti vonatkozása

Manapság minden színvonalas valószínűségelméleti tankönyvben, vagy olyan valószínűségelméleti monográfban, amely valószínűségi változók sorozatának konvergenciájával foglalkozik megtalálható az alábbi egyenlőtlenség.

$$\mathbf{P}(|\xi-E(\xi)|>\varepsilon) < D^2(\xi)/\varepsilon^2 \qquad (5.1)$$

Ez az egyenlôtlenség Csebisev-egyenlőtlenség néven ismert. *Csebisev* 1867. évi [5] ([6]) eredeti dolgozatában három tétel található. Az első tételben *Csebisev* az (5.1) egyenlőtlenséget véges számú lehetséges értékekkel rendelkező valószínűségi változók összege esetében bizonyítja. Ez a speciális eset lehetővé teszi azt, hogy a bizonyítás kizárólag elemi algebrai műveletekkel történhessen, de egyébként technikailag igen hosszú a bizonyítás. A második tétel – lényegében véve-az első tétel egy következménye, miután az első tételbeli összeget számtani középpé alakítja át. A harmadik tétel szintén a második tétel direkt következménye. Itt a második tételben szereplő valószínűségi változók számának végtelenhez történő határérték átmenetével foglalkozik. Ahogyan mi ma már tudjuk, ez nem más, mint valószínűségi változók számtani középre vonatkozó nagy számok törvénye. Így ez a harmadik tétel a dolgozat célja is. Meg is jegyezi, hogy ebből a tételből rögtön következik a Bernoulli-féle nagy számok törvénye, amely azt állítja, hogy egy véletlen esemény relatív gyakorisága stabilizálódik a szóban forgó esemény valószínűsége körül, ha a véletlen kísérletek száma tart a végtelenhez.

Most (5.1) egyenlőlenséget matematikai precíz formában, de (5.1)-től egy kicsit eltérő módon fogalmazzuk meg.

Csebisev-egyenlőtlenség: *Ha egy ξ valószínűségi változónak van szórása, akkor fennáll, hogy*

$$\mathbf{P}\left(|\xi-E(\xi)|>\lambda D(\xi)\right)\leq\frac{1}{\lambda^2}, \qquad (5.2)$$

ahol $\lambda > 1$.

a) Megjegyzés: Eredetileg *Csebisev* a valószínűségi változók összegére vonatkozólag ebben a formában fogalmazta meg az egyenlőtlenséget, de az is igaz, hogy nem ilyen általános valószínűségi változóra vonatkozott.

A Theoria Combinationis-ban Gauss (a modern jelölésre átalakítva)

$$\mathbf{P}(|\xi|\leq\lambda\tau)=\int_{-\lambda\tau}^{\lambda\tau}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (5.3)$$

ahol $\varphi(x)$ unimodális (egy csúcsos) és az origóra szimetrikus (sűrűség) függvény és $\lambda > 0$, valószínűségének az egyenlőtlenséggel történő becslésével foglalkozott. A *Gauss* által talált egyenlőtlenség modern valószínűségelméleti fogalmazása (*Cramér* [7] átfogalmazta) a következő:

$$\mathbf{P}\left(|\xi-m|\geq\lambda\tau\right)\leq\frac{4}{9\lambda^2},\ \lambda>0,\tau>0, \qquad (5.4)$$

ahol m a $\varphi(x)$ függvény módusza és $\tau^2=\sigma^2+\left(m-E(\xi)\right)^2$ (*Gauss*nál $m = E(\xi) = 0$ volt). Ezt a egyenlőtlenséget az (5.2) egyenlőtlenséggel összehasonlítva, azt mondhatjuk, hogy a Csebisev-egyenlőtlenségnél csaknem 50 évvel korábban, pontosabban az 1821-ben, vagyis éppenséggel *Csebisev* születésének évében *Gauss* bebizonyította a híres Csebisev-egyenlőtlenséget az unimodális és az origóra szimmetrikus folytonos eloszlásra vonatkozólag. Itt az a lényeg, hogy különböző célból indulva, hasonló egyenlőtlenséghez jutottak. *Gauss* hiba valószínűségének becslésére adott korlátot. Egyébként, a Csebisev-egyenlőtlenség a valószínűségi változónak a várható értékétől való abszolút eltérésének valószínűségére, vagyis a *hibaelmélet* terminológiájával élve, a *hiba valószínűségére* ad becslést. Tehát a modern valószínűségelmélet és annak alkalmazásában igen fontos szerepet játszó *Csebisev* típusú egyenlőtlenséget *Gauss* fedezte fel először, és pedig unimodalitási szorítás révén sokkal szorosabb, pontosabban majdnem 50%-kal szorosabb becslést adta.

b) Megjegyzés: 1853-ban, (tehát *Csebisev*nél 14 évvel előtte), *Irenée-Jules Bienaymé* (1796–1878), [3] a francia statisztikus, bebizonyította a Csebisev-egyenlőtlenséget általános formában. E dolgozat címéből is látható, hogy az egyenlőtlenségének motivációja szintén a hibaelmélet volt. Tehát, mind a Gauss-egyenlőtlenség, mind a Bienaymé-féle egyenlôtlenség indítéka az asztronómia és geodézia igénye vagyis a hibaelmélet volt.

c) Megjegyzés: A Bernoulli-féle nagy számok törvénye az esemény-valószínűsége relatív-gyakorisági interpretációjának elméleti megalapozásával foglalkozik. *Csebisev* [5,6] célja ennek a Bernoulli féle nagy számok törvényének általánosítása, illetve az ehhez szükséges matematikai eszköz feldolgozása volt. Így *Csebisev* az egyenlőtlenségét nagy számok törvényének alakjában fogalmazta meg. Ebben az alakban a modern valószínűségelméletben a Csebisev-egyenlőtlenség bizonyult igen hatékony eszköznek a valószínűségi változók sorozatának konvergenciájánál; például a nagy számok törvényeinek későbbi általános esetek bizonyításánál. Ez a Csebisev-egyenlőtlenség a matematikán belüli „alkalmazása" vagyis, pusztán elméleti alkalmazás. Egyébként, a Csebisev típusú egyenlőtlenségek tanulmányozása még napjainkban is egy kutatási terület [2,9,26].

6. Következtetések

A jelen dolgozatban kifejtett észrevételeim, illetve megállapításaim tudománytörténeti szemszögből új eredmények, így ezek hozzájárulnak a geodéziai történetéhez, s némi fényt vetnek a geodézia és matematika kapcsolatának történelmi gyökerére és a hibaelméletnek a valószínűségelmélet fejlődésére gyakorolt hatásának korrekt megértésére. Ezeknek az eredményeknek ismételt összefoglaló gyanánti újra történő felsorolását fölöslegesnek tartom, miután az előző négy paragrafus konkrét probléma-orientált jellegűen tagolódva felépült szerkezetéből könnyen láthatóak az észrevételeim, illetve megállapításaim.

A valószínűségelmélet és a matematikai statisztika történetével foglakozó tanulmányok túlnyomó része úgy elemzi a kutatási tárgyat képező anyagot, hogy a sztochasztikus jelenség, azaz „véletlenszerűség" és a determinisztikus jelenség közötti eltérésének általános jellemzői jobban domborodjanak ki. A jelen dolgozatban ezzel szemben, a valószínűségelmélet konkrét fogalmait, nevezetesen a valószínűségi változó és hozzá szorosan kapcsolódó néhány alapfogalom kialakulását, illetve azok fejlődését történelmi forrásokon keresztül nyomon követtem, s ennek a folyamatnak keretén belül sok minden konkrétan és tisztán látható volt. Ez a hozzáállás önmagában is érdekes és egy új módszertani elemet képez a feltárt új tények mellett. Ehhez szükség volt sok forrás anyag összehasonlító elemzésére.

Szeretném itt megjegyezni, hogy a tudománytörténeti tények és az igazság feltárása nem egy könnyű tevékenység, hiszen sok-sok aprólékos és fáradtságos munkával jár. Végezetül, e vonatkozásban illetve ilyen kutatás jelentősége kapcsán idézem *Karl Pearson*-nak, a modern statisztikatudomány egyik alapítójának, egy gondolat-ébresztő megfigyelését: „The history of statistics has never yet been properly written. As in so many cases of so-called "histories„ writers are content to accept what their predecessors have asserted, just as *Galen'*s statements of 200 A.D. may be found in the anatomical textbooks of today and you can trace the errors through 1700 years, because nobody has gone back to read the original sources and very few people have taken or will take the trouble to do it"[28]).(„A statisztika történetét ez idáig nem sikerült jól megírni. Abban a sok dolgozatban, amelyek úgy nevezett „történetekről" szólnak, a szerzők az elődeik megállapításaival minden további nélkül egyetértenek. Ilyen módon, például mai anatómiai tankönyvekben is akadnak a II. századi *Galen*-nak téves megállapításai, s ilyen jellegű tévedések 1700 éven keresztül kísértek minket, mivel nem tanulmányozták alaposan az eredeti forrás anyagot, ezt a fáradságot nagyon kevesen vállalják, és várhatóan a jövőben is így lesz.").

IRODALOM

1. *Ádám J.*: Detailed Study of the Duality Relations for the least Squares Adjusment Euclidean Spaces. Bulletin Geodésque, 56 (1982), 180–195.
2. *Bickel, P. J, Krieger, A. M.*: Extensions of Chebyshev's inequality with applcations, Probability and Mathematical Statistics 13 (1992), 293–310.
3. *Bienaymé, I. J.*: Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris 37 (1853), 309–324.
4. *Biró P.*: Felsőgeodézia, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
5. *Chebyshev, P. L.*: Des Valeurs Moyennes, Liouville's Journal de Mathématique Pures et Appliquées, 12 (1867), 177–184, az angol fordítása:
6. *Smith, D. E.:* A source book in mathematics, McGraw-Hill, New York, 1929 konyveben: Chebyshev, P. L.: On the mean vatlues, 580–587.

7. *Cramer, H.*: Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, 1954.
8. *Czuber, E.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1914.
9. *DasGupta, A.*: Best constants in Chebyshev inequality with various applications. Metrika, 51 (2000), 185–200.
10. *Detrekői Á.*: Kiegyenlítô számítások, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
11. *Gauss, C. F.:* Theoria Motus Corporum Coelestium, Perthes und Besser, Hamburg, 1809, az angol forditása:
12. *Gauss, K. F.:* Theory of Motions of the Heavenly Bodies, New York, Dover, 1963.
13. *Gauss, C. F.*: Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum, Commentatines societatis regiae scientarium Gottingensis recentiores, 1823, 1826, 1828., az angol forditása:
14. *Gauss, K. F.*: Theory of the Combinations Least Subject to Errors, Part one, Part two, Supplement, translated by G. W. Stewart, Philadelphia, 1995.
15. *Hagen, G.*: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Dümmler, Berlin, 1837.
16. *Joó, I.–Raum, F.*(főszerkesztők) : A magyar földmérés és térképészet története, Erdészeti és Faipari Egyetem, Földmérési es Földrendezői Föiskolai Kar, Székesfehérvár, 1991, 1996.
17. *Koch, K. R.*: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1999.
18. *Kolmogoroff* : Grundbegriffe der Wahrsheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933.
19. *Laplace, P.S.:* Mémoire sur la Probabilité des causes par les évènements, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 6(1774), 621–656.
20. *Laplace, P. S.:* Théorie Analytique des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1812, (2nd ed., 1814 and 3rd ed., 1820).
21. *Levy, P.:* Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1825.
22. *Monhor, D.*: Mérési hibák, központi határeloszlás-tételek, Hagen-féle hipotézisek és normális eloszlás, Geodézia és Kartográfia, 2001/1, 11–16.
23. *Monhor, D.*: Vizsgálatok az elméleti geodézia egyes fejezetei matematikai alapjairól és módszereiről, Székesfehérvár, 2003, kézirat.
24. *Monhor, D.*: On the relevance of convolution of uniform distributions to the theory of errors, Acta Geod.Geoph. Hung., 40(2005), 59−68.
25. *Monhor, D.* and *Takemoto, S.*: Geodetic and astronomical contributions to the invention of the normal distribution: some refinements and new evidences, Journal of Geodetic Society of Japan, 51 (2005), 175–185.
26. *Monhor, D.* and Takemoto, S.: Understanding the concept of outlier and its relevance to the assessment of data quality: Probabilistic background theory, Earth Planets and Space, 57(2005), 1009–1018.
27. *Pearson, K.:* James Brenoulli's theorem, Biometrika, 17(1925), 202–211.
28. *Pearson, E. S.* (eds): The history of statistics in the 17th and 18th centuries against the changing background of intellectual, scientific and religious thought: lectures given by Karl Pearson at University College, London, during the academic sessions, 1921-1933, Charles Griffin, London, 1978.
29. *Plackett, R. L.*, The principle of the arithmetic mean, Biometrika, 45 (1958), 130-135.
30. *Poincare, H.*: Calcul des Probabilités, Deuxième édition, revue et augmentée par l'autheur, nouveau tirage, Gauthier-Villars, Paris, 1923.
31. *Prékopa, A.:* A statisztikai döntéselmélet gondolkodásának fejlődése napjainkig, Statisztikai Szemle, 56(1978), 893–903.
32. *Prékopa, A.:* Valószínűségelmélet, Műszaki Kiadó, Budapest, 1972.
33. *Todhunter,* I. : A history of the mathematical theory of probability: From the time to that of Laplace, Macmillan, 1865, reprinted by Chelsea Publishing Company in 1949.

C. F. Gauss: Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum: From the theory of errors to the probability theory

Davaadorjin Monhor, Faculty of Geoinformatics University of West Hungary, Székesfehérvár

Summary

In part I the historical development of the transition process from the mathematical models of measurement errors in astronomy and geodesy to the concept of random variable in modern probability theory was amongst others analyzed with special relevance to *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars*

Prior, Pars Posterior, Supplementum by K. F. Gauss. The present paper, i.e., Part II is the continuation of Part I.

We carried out a comparative analysis of ways of occurrences of the concept of mathematical expectation in works by Laplace, Poisson, Czuber, Gauss, Chebyshev and others. As a result of the analysis it is established that it is Gauss who first arrived at the modern standard of definitive consideration of the concept. The same can be observed for the case of variance, too.

Essentially speaking, it is known that the origin of Chebyshev inequality can be traced back to Gauss and Bienaymé. However, the nature of driving force behind these inequalities, especially in the case of Gauss and Bienaymé has yet not been studied in a proper way. Clarifying these issues, we revealed amongst others that the inequalities of both Gauss and Bienaymé originated from geodesy and astronomy in the sense that they contributed to the theory of errors. For geodesists and astronomers, it is surprisingly interesting fact.

Studies on questions of historical developments in probability and statistics are usually revolved around the rather general framework of the interplay between the deterministic and stochastic issues. The approach in the present paper is quite different: several concrete basic concepts were first selected, and then we proceeded to trace back to the formation process of these concepts in fundamental source works and compared the occurrences of the concepts. This approach conveys a novelty in methodological attitude.

A Geodéziai és Kartográfiai Egyesület megalakulásának 50. évfordulója alkalmából megjelentetni tervezett jubileumi kiadvány egyéni támogatói

Tisztelt Tagtársak!

Ismert tény, hogy Társaságunk jogelődje, a Geodéziai és Kartográfiai Egyesület 1956-ban alakult. Lapunk 2005/10. számában a Társaság vezetése egy felhívásban tájékoztatta tagságunkat, hogy az évforduló méltó megünneplésére készülünk. A felhívásban említés történik egy jubileumi Emlékkönyv kiadásáról is, amelynek előkészületei a felhívás megjelenésével egyidejűleg már meg is kezdődtek. A folyóirat januári számában ***Zsámboki Sándor*** tagtársunk, mint a kiadvány főszerkesztője, összefoglalta a tervezett Emlékkönyvvel kapcsolatos tennivalókat, és tájékoztatást adott a szerkesztési munka aktuális helyzetéről.

A hivatkozott felhívás vázolta a kiadvány költségeit is. Ebből megtudhattuk, hogy az addig már felajánlott szponzori támogatások mellett a vezetőség köszönettel vesz minden további intézményi vagy egyéni hozzájárulást, amely „Jubileumi támogatás" címmel a mellékelt csekken fizethető be. A támogatók nevét az Emlékkönyv tartalmazni fogja, de lapunk vállalkozott arra is, hogy itt és az ezt követő számokban is közli azok jegyzékét, akik – átérezve az évforduló méltó megünneplésének jelentőségét – egyéni hozzájárulásukkal kívánják az anyagi feltételek megteremtését előmozdítani. Bízunk abban, hogy Tagtársaink segítő támogatása eredményeként ez a lista hónapról hónapra egyre bővül majd.

Szerkesztőség

Egyéni támogatók névsora
(a 2006. május 10-ig történt befizetések alapján)

1. ***Árvolt Gyula***
2. ***Dr. Forgács Zoltán***
3. ***Dr. Berencei Rezső és felesége***
4. ***Meggyesi Ferenc***
5. ***Geofor Kft.***
6. ***Dr. Bognárné Nagy Ilona***
7. ***Ágfalvi András***
8. ***Csiffári Nándor***
9. ***Dr. Detrekői Ákos***
10. ***Dr. Kárpát József***
11. ***Ajtay Sándor***
12. ***Dr. Mihály Szabolcs***
13. ***Apagyi Géza***
14. ***Hetényi Ferencné***
15. ***Zsámboki Sándor***
16. ***Winkler Péter***
17. ***Dr. Biró Péter***
18. ***Bartos Ferenc***
19. ***Bolla Gyula***
20. ***Csekő Ernő***
21. ***Osskó András***