



C. F. Gauss: *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum*: A hibaelmélettől a valószínűségelméletig

I. rész

Dr. Monhor Davaadorzsín egyetemi docens,
NYME Geoinformatikai Kar

Előszó

A. M. Legendre francia matematikus és K. F. Gauss német matematikus és geodéta, egymástól függetlenül fedezte fel a legkisebb négyzetek módszerét, amely a csillagászati és geodéziai mérési adatok matematikai feldolgozásában fontos szerepet játszott és játszik ma is. A legkisebb négyzetek módszere Gauss-féle változatának nagy jelentősége abban áll, hogy Gauss a valószínűségelmélet és matematikai statisztika keretén belül helyezte a módszert, és ezáltal nagy lépést tett meg az adatfeldolgozási matematika mind elméleti és mind gyakorlati eszközeinek fejlődésében.

Ma a valószínűségelmélet és a matematikai statisztika terjedelmes tudomány; a geodézia az egyike azoknak a területeknek, ahol a valószínűségelmélet és a matematikai statisztika módszerét széles körben használják. Így, a valószínűségelméleti és a matematikai statisztikai gondolkodásmóddal való ismerkedés hasznos a gyakorlati szakember számára is. A szerző C. F. Gauss: „*Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum*” valószínűségelméleti vonatkozását tudománytörténeti szempontból vizsgálja, ismerteti az eredményeit két részben. A jelen dolgozat a tanulmány az első része.

1. Bevezetés: háttér és motiváció

Pontosan 185 éve, azaz 1821. február 15-én a Göttingeni Királyi Tudományos Akadémián (the Royal Society of Göttingen) Karl Friedrich Gauss, a nagy matematikus és geodéta tartott egy előadást, amelynek címe „*Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum*” volt. Pár évvel később látott napvilágot ez az előadás

a Göttingeni Akadémia közleményében. Ez a mű hosszú ideig igen nagy hatással volt a geodéziára, s azon belül a hibaelméltre és a kiegyenlítőszámításra, és ez talán még most is így van. Amerikában a *Classics in Applied Mathematics* sorozaton belül G. W. Stewart, University of Maryland számítástudományi professzora fordította latinból angolra, s 1995-ben a fordítás *Theory of the Combinations Least Subject to Errors, Part one, Part two, Supplement* címmel és párhuzamos latin szöveggel egyetemben meg is jelent. E klasszikus mű az eredeti megjelenése után csaknem 170 év elteltével történő angol nyelvű fordítása világosan mutatja a mű történelmi-szakmai jelentőségét, túl ezen, gazdagítja a tudománytörténeti kutatást egy páratlan forrással. A szerző észrevette azt, hogy mind a *Combinationis Observationum*-ot mind a *Theoria motus*-t [11, 12] régóta statisztikai (pl. legkisebb négyzetek módszere, Gauss-Markov-féle tétel), numerikus, geodéziai és egyéb alkalmazási oldalokról tanulmányozták, miközben a valószínűségelméleti alapfogalmak kialakulása hosszú folyamatának tükrében történő kutatása majdnem érintetlenül maradt. Ez a felismerés már jó pár évvel ezelőtt e sorok íróját az említett hiányosság pótlására célzó kutatásokra ösztönözte. Következésképpen, a jelen dolgozat célja a *Combinationis Observationum* a valószínűségelmélet alapvető fogalmi kialakulásában játszott szerepének világossá tétele, s ezáltal hozzájárulás a csillagászati és geodéziai tudományoknak a modern valószínűségelmélet fejlődésére gyakorolt hatása vizsgálatához.

A dolgozat további része az alábbi módon épült fel. A 2. paragrafus foglalkozik a *Theoria Combinationis* valószínűségelmélet alapvető fogalmaira vonatkozó részeinek áttekintésével, illetve összefoglalásával. Ez a rész további részletes tanulmányozásra nyújt lehetőséget. A 3. paragrafusban a valószínűségelmélet kialakulásában a *Theoria*

Combinatio hozzájárulását tanulmányoztuk. A 4. paragrafus az elméleti értelemben vett várható érték és szórás kialakulásának elemzésével foglalkozik. Az 5. paragrafusban a Csebisev-egyenlőtlenség eredetét és annak hibaelméleti, ill. geodéziai vonatkozását részletezzük. Végül, a 6. paragrafus foglalja össze a tanulmány legfontosabb eredményeit, illetve annak módszertani sajátosságait.

2. *Theoria Combinatio* Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum c. mű szerkezete, tartalma és tárgyalás módja

A *Pars Prior* (az Első Rész) és a *Pars Posterior* (a Második Rész) egységesen, de cím nélkül számozott 40 kis paragrafusból épül fel. A *supplementum* pedig további 25 paragrafusból áll. A *Theoria Combinatio* tehát összesen 65 paragrafusból áll, s ezek közül mindössze csak az első 14 paragrafus foglalkozik a valószínűségelméleti kérdésekkel. Megjegyezzük, hogy az eredeti latin nyelvű *Theoria Combinatio*-ban a paragrafusoknak nincsenek címei, azok csak egyszerűen számozva vannak. Némelyek igen rövidek, és csak pár mondatból állnak. *Gauss* lényegre törő, egyszerű és világos stílusban írta meg gondolatait, s ebből adódóan a címek is könnyen megfogalmazhatók, ha valaki vállalkozna erre. A *Theoria Combinatio* összes 65 paragrafusára a címetek a fordítás során *G. W. Stewart* professzor a paragrafusok tartalma alapján fogalmazta meg. Továbbá, a fordító írta az *Afterwords*-t (utószó) is. Ez a *Theoria Combinatio*-nak a statisztikai, lineáris algebrai, illetve a numerikus aspektusát foglalta össze. A valószínűségelméleti vonatkozásairól tett megjegyzései hasznosak, bár nem kutatási jellegűek. Az említett valószínűségelmélettel foglalkozó 14 paragrafus címei a következők:

Pars Prior/ Part One (az Első Rész)

1. Random and regular errors in observations (Véletlen és szabályos mérési hibák)
2. Regular errors excluded; their treatment (Szabályos hibák kihagyása és kezelése)
3. General properties of random errors (A véletlen hibák általános tulajdonságai)
4. The distribution of error (Hiba eloszlása)
5. The constant part or mean value of the error (Az állandó része, vagyis a hiba középértéke)

6. The mean square error as measure of uncertainty (A kvadratikus középhiba, mint a bizonytalanság fokmérője)
7. Mean error, weight, and precision (Középhiba, súly és pontosság)
8. Effect of removing the constant part (Az állandó részének eltávolításának hatása)
9. Interpercentile ranges and probable error; properties of the uniform, triangular and normal distribution (Inerkvartilis terjedelem és valószínű hiba; az egyenletes, háromszög és normális eloszlás)
10. Inequalities relating to the mean error and interpercentile ranges (A középhiba és inerkvartilis terjedelemre vonatkozó egyenlőtlenség)
11. The fourth moments of the uniform, triangular and normal distributions (Az egyenletes, háromszög és normális eloszlás negyedrendű momentumai)
12. The distribution of a function of several errors (Több hiba függvényeinek eloszlása)
13. The mean values of a function of several errors (Több hiba függvényeinek középértéke)
14. Some special cases (Néhány speciális eset)

E paragrafusok után *Gauss* fokozatosan tér át a statisztikai és numerikus jellegű kérdésekre, ami emlékeztet a mai kiegyenlítőszámítások könyvének általános szerkezetére. Ha meggondoljuk, hogy ez a mű 185 évvel ezelőtt íródott, akkor könnyen felfogható *Gauss* zsenialitása, illetve munkájának geodéziai jelentősége. A most fel nem sorolt paragrafusokkal, illetve azok tudományos történeti aspektusaival többen is foglalkoztak. Viszont nem foglalkoztak a felsorolt 14 paragrafus valószínűségelméleti vonatkozásával. Ennek oka talán abban keresendő, hogy a valószínűségelméleti rész aránylag nagyon kis része az egész műnek. A többi részt (a legkisebb négyzetek módszerét, a statisztikai és numerikus eljárásokat) a gyakorlatban közvetlenül használták. Ugyanakkor a valószínűségelméleti kérdések talán csak az elméleti háttérrel szolgálták.

3. A hibaelmélettől a valószínűségelméletig: áttekintés és észrevételek

Amennyiben a *Gauss: Theoria Combinatio*-t a valószínűségi változó fogalom kialakulásának hosszú folyamata tükrében nézzük, akkor e folyamat eddiginél jobb és világosabb megértéséhez juthatunk. *Galileo Galilei* (1564–1642),

a híres olasz tudós a hibaelmélet előfutára volt abban az értelemben, hogy megfigyelte a hiba néhány véletlen jellegét, azonban nem történt meg annak matematikai megfogalmazása [22, 23]. *Thomas Simpson* (1710–1761) tovább lépett azzal, hogy megpróbálta a hiba eloszlást matematikailag leírni a háromszög eloszlás felhasználásával [24]. Meg kell azonban jegyezni, hogy akkoriban folytonos valószínűségi változó fogalommal nem voltak tisztában, és így a mérési hiba lehetséges értékeit egymáshoz igen közelálló diszkrét értéként képzelték, még akkor is, amikor valójában folytonos eloszlást vizsgáltak.

P. S. Laplace (1749–1827) 1774-ben megjelent dolgozatában azt találjuk, hogy ő volt az első, aki a folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényét úgy képzelte, mint egy tetszőleges, nem negatív függvény és annak a teljes számegyenesén vett integrálja 1-gyel egyenlő [19, 20, 25]. Ez már a mai értelemben is szabatos, folytonos valószínűségi változó, azonban mégsem úgy foglalkozott a valószínűségi változóval, mint egy önálló matematikai fogalommal. *Laplace* a mérési hibákkal és eloszlásuk sűrűségfüggvényével foglalkozik úgy, mint manapság a valószínűségelméletben a valószínűségi változókkal és az eloszlás sűrűségfüggvényével. Ez világosan megmutatja azt, hogy *Laplace* nagy lépést tett meg a hibaelmélettől a valószínűségelmélet felé haladó úton. *P. S. Laplace: Théorie analytique*

des probabilités, 1812 c. könyve fontos mérföldkő a valószínűségelmélet fejlődésében. 1814-ban megjelent a könyv második, 1820-ban pedig a harmadik kiadása is.

A *Theoria combinationis*-ban a hibaelmélet elméleti felépítését *Gauss* állította elő teljességgel, világos és rendszerezett formában. Részletesen kifejtette a hiba természetét, s a mérési hibákat két fajtára csoportosította: irreguláris (véletlen) és reguláris (azaz szabályos) hibákra. Az irreguláris hibák olyan hibák, amelyeket előre pontosan meghatározni nem lehet, tehát véletlen hibák, s „érzékszervünk tökéletlenségéből és külső irreguláris hatásaiból, pl. levegő mozgásából eredendők.” *Gauss* ezen osztályozása annyira időtálló, hogy a mai kiegyenlítőszámítási tankönyvekben, ill. monográfiákban is a különböző szempont szerinti osztályozás mellett a hibáknak szabályos, ill. szabálytalan hibákra való csoportosítása található, ami nem más, mint a Gauss-féle osztályozás. *Gauss* kizárólag a véletlen hibák „törvényszerűségével”, azaz, mai tudományos fogalmi szintre (illetve az azt kifejező nyelvezetre) fordítva, a valószínűségi változóval foglalkozott. Amennyiben figyelmesen megnézzük az előző paragrafusban felsorolt, a *Theoria combinationis* 14 paragrafusát, rögtön azt is láthatjuk, hogy ha az itt szereplő „mérési hiba”, illetve „hiba” kifejezéseket valószínűségi változó kifejezéssel cseréljük fel,

gpsnet.hu
GNSS Szolgáltató Központ

Valós idejű helymeghatározás

- DGPS korrekciók (országosan)
- RTK korrekciók (17 állomásról)

Utólagos feldolgozáshoz

- 24 órás RINEX fájlok
- 1 órás RINEX fájlok

FÖMI KOZMIKUS GEODÉZIAI OBSZERVATÓRIUM
Tel.: 27/374-980
Fax: 27/374-982

akkor megkapjuk már egy manapság is használható valószínűségelméleti tankönyv bevezető részét. Ez azt mutatja, hogy Gauss a hibaelméletet a valószínűségelmélet egy részeként állította elő. Ezen észrevételt bővítsük tovább néhány konkrét elemzéssel és az azon alapuló saját konklúziómmal. A *Theoria Combinationis Observationum* 4. paragrafusában Gauss azt írja „Let φx denote the relative likelihood of a total error x in a fixed class of observations. By continuity of the error, this means that the probability of error lying between two infinitely close limits x and $x+dx$ is $\varphi x \cdot dx$ In general the value of the integral $\int \varphi x \cdot dx$ taken from $x=a$ to $x=b$ represents the probability that an error, as yet unknown, will lie between a and b . Hence the value of this integral taken from the lower limit of the possible error to the upper limit will be one. Since φx is zero outside of these limits, it is clear that

The value of the integral $\int \varphi x \cdot dx$ from $x = -\infty$ to $x = +\infty$ is always one.”

(„ φx -szel jelöljük x -nek totális relatív likelihood-jét [sűrűségfüggvényét] a mérések egy bizonyos osztályára vonatkoztatva. A hiba folytonos létére való tekintettel ez azt jelenti, hogy $\varphi x \cdot dx$ annak valószínűsége, hogy a hiba végtelenül egymáshoz közelálló x és $x+dx$ között legyen... Általában az $x=a$ -tól $x=b$ -ig terjedő $\int \varphi x \cdot dx$ integrál értéke adja annak valószínűségét, hogy az egyelőre még ismeretlen hiba az a és b között helyezkedik el. Következésképpen, ha ebben az integrálban a lehetséges hiba az alsó határtól a felső határig terjed, akkor az integrál értéke eggyel lesz egyenlő.” Ezen határokon kívül φx egyenlő nullával; ezért, az világos, hogy

$\int \varphi x \cdot dx$, ahol $x = -\infty$ -tól $x = +\infty$ -ig terjed, értéke mindig egyenlő eggyel.)

Ha a szövegben a „relative likelihood” helyett a „density”, az „error” helyett pedig a „valószínűségi változó” kifejezést íránk be, akkor a fent idézett rész egy mai valószínűségelméleti tankönyvben a folytonos valószínűségi változót bevezető résznek tökéletesen megfelelné, mégpedig tömör és igen precíz megfogalmazásként. Érdemes említeni, hogy a *Theoria Combinationis* 3. paragrafusában a diszkrét valószínűségi változó is külön szóba került. Így, a valószínűségi változó definitív bevezetése teljes. Továbbá, lényeges szempont az, hogy Gauss előtt, sőt utána is sokáig nem volt ilyen egyértelmű és világos tárgyalásmód.

A Gauss-féle *Theoria combinationis* után több mint 10 évvel később jelent meg G. Hagen:

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung c. könyve Dümmler, 1837, amelyben szintén a hibaelmélet található. Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a könyv címe nem „hibaelmélet”, hanem már a „valószínűségelmélet”, vagyis szó szerint valószínűségszámítás. Hagen e könyvben bevezette az elemi hiba fogalmát, és annak alaptulajdonságait három axiómában rögzítette, valamint kísérletet tett a normális eloszlás e három axiómából történő levezetésére is. (E levezetés korszerűsítésével és egyéb valószínűségelméleti vonatkozásaival a [17, 22, 25] dolgozatok részletesen foglalkoznak). Később megjelentek R. Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1914, H. Poincaré: *Calcul des Probabilités*, Gauthier–Villars, Paris, 1912 és P. Lévy: *Calcul des Probabilités*, Gauthier–Villars, Paris, 1925. c. könyvek is. Ezek a kornak legteljesebb és legjelentősebb valószínűségelméleti művei voltak, és azok mindegyikében a hibaelmélet központi helyet kapott. Például Poincaré könyvében, a következő hat fejezet foglalkozik a hibaelmélettel és a legkisebb négyzetek módszerével.

Chapitre VI: La Loi de Gauss et Les Épreuves Répétées (Gauss törvénye és ismételt események)

Chapitre X: La Théorie des Erreurs et la Moyenne

Arithmétique (A hibaelmélet és a számtani közép)

Chapitre XI: Justification de la Loi de Gauss (Gauss törvényének indoklottsága)

Chapitre XII: Erreurs sur la Situation d'un Point (Ponthelyre vonatkozó hibák)

Chapitre XIII: Méthode des Moindres Carrés (Legkisebb négyzetek módszere)

Chapitre XIV: Calcul de L'Erreur a Craindre (Hiba kiegyenlítésének számítása).

A leírtakból látható, hogy a hibaelmélet egyre inkább lefedte az akkori valószínűségelmélet jelentős részét. E jelenség, illetve fejlődési folyamat egészen a 1930-as évekig tartott.

Másfelől, a XIX. század második felétől kezdve a biológiai megfigyelések és mérések feldolgozásában a valószínűségelméleti, különösen a statisztikai módszerek alkalmazásaival intenzíven foglalkoztak: Francis Galton (1822–1911), Walter Weldon (1860–1906) és Karl Pearson (1857–1936). Ezzel párhuzamosan az osztrák Ludwig Boltzmann (1844–1906), az angol James Clerk Maxwell és Josiah Willard Gibbs munkássága révén az elméleti fizikában a valószínűségelmélet és statisztika módszerei nyertek alkalmazást. Ezek a fejlemények a valószínűségelmélet további fejlődését eredményezték. Továbbá, a

matematikán belül a XX. század eleje körül jelentek meg a valószínűségelméletben a mérték-elmélet hatásának csírái *Emile Borel* (1871–1956) és *Maurice Frechet* (1878–1973) francia matematikus munkáiban. Ezen a talajon az orosz *A. N. Kolmogorov* az 1933-ban megjelent könyvében a valószínűségelméletet axiomatikus alpra helyezte.

A valószínűségelmélet axiomatikus megalapításától kezdve, azaz az 1930-as évektől, a helyzet teljesen megváltozott. A valószínűségelmélet terjedelmes matematikai diszciplínává történő átalakulási folyamata következett. Időközben a valószínűségelmélet alkalmazási területe rendkívüli módon kiterjedt. Ezzel egyidőben a modern valószínűségelméletből a hibaelmélet „eltűnt”. Napjainkban, a valószínűségelméleti tankönyvekben és monográfiákban a hibaelmélet nem található. Ezzel a folyamattal párhuzamosan a hibaelmélet „újra” a geodézián belül helyezkedett el. Ma már nyilvánvaló, hogy a hibaelmélet a geodéziához tartozik.

(Folytatás következik)

C. F. Gauss: Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum: From the Theory of Errors to the Probability Theory Part I

Davaadorjin Monhor,
Faculty of Geoinformatics,
University of West Hungary, Székesfehérvár

Summary

The statistical, numerical and application aspects of the *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, Pars Prior, Pars Posterior, Supplementum* by *K. F. Gauss* have been topics of a number of researchers of history of science, of mathematicians and geoscientists. However, as the author of the present paper notices, the scientific analysis of the role of the *Theoria Combinationis* in the formation of some basic concepts of modern probability theory has yet not been carried out. The author takes some concrete steps towards filling this gap by the present paper which consists of two parts. The part I considers Gauss' contribution to the development of the concept of random variable within the general framework of transition from the mathematical models of measurement errors in astronomy and geodesy to the concept of random variable which is at the very core of modern theory of probability.

GEODÉZIA ÉS KARTOGRÁFIA

hirdetési díjai:

| SZÍNES OLDALAK | | FEKETE-FEHÉR/BELSŐ | |
|--------------------|-------------|--------------------|------------|
| hátsó külső oldal | 120.000,-Ft | 1 oldal | 40.000,-Ft |
| címlap belső oldal | 100.000,-Ft | 1/2 oldal | 25.000,-Ft |
| hátsó belső oldal | 80.000,-Ft | 1/4 oldal | 13.000,-Ft |
| | | 1/8 oldal | 10.000,-Ft |

Egyedi megbeszélés alapján lehetőség van szórólap elhelyezésére is. Áraink az ÁFÁ-t tartalmazzák.

Az árak nyomdakész hirdetésre vonatkoznak, többszöri megrendelés esetén kedvezmény!

Jogi tagjaink részére 10 % engedményt adunk! A kézirat leadási határideje minden hónap harmadika.

Megrendelés és hirdetésfelvétel:

MAGYAR FÖLDMÉRÉSI, TÉRKÉPÉSZETI ÉS TÁVÉRZÉKELÉSI TÁRSASÁG

1027 Budapest XIV., Bosnyák tér 5. I. emelet 105. Telefon: 201-86-42 Fax: 460-41-63