



# Domborzati modellek és a mintavételi tétel (II. rész)

*Elek István* egyetemi docens, ELTE Informatikai Kar,  
Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék,  
MTA Térképtudományi és Geoinformatikai Kutatócsoport

## Bevezetés

Egy előző cikkben ismertettünk a domborzati modellekre vonatkozóan a mintavételi tételből következő néhány megállapítást. Most bemutatunk egy, az adatrendszerek ritkításán alapuló automatikus generalizálási eljárást. A ritkítás, ha a mintavételi tételre figyelemmel végezzük, olyan szabályozott körülmények közötti, kontrolált adatvesztést valósít meg, ami nagyon hasonlatos a térképészeten használt generalizálásra. A bemutatott technika egyelőre csak domborzatra lett kidolgozva.

A cikk első részében bemutattuk a mintavételezés folyamatát, matematikai modelljét és a mintavételi tételt. A következőkben megvizsgáljuk a mintavételezés átviteli tulajdonságait, annak érdekében, hogy megértsük a ritkítás hatását.

## Az analóg jel visszaállítása

Mint az előző cikkben említettük a mintavételezéssel egy digitális adatrendszert állítunk elő egy folytonos függvényből, a mintavételi tétel figyelembevételével. A mintavételi tétel betartásával biztosítható, hogy a digitális adatrendszer és analóg függvény spektruma megegyezzen, ezáltal biztosítva a veszteségmentességet.

Csak emlékeztetőképpen idézzük vissza az előző cikk néhány fontos megállapítását!

Jelöljük  $G(f)$ -fel az eredeti, és  $G_d(f)$ -fel a digitalizált függvény spektrumát! A Dirac- $\delta$  Fourier-transzformáltjának és a konvolúció tételek felhasználásával felírható a mintavételezett függvény spektruma:

$$G_d(f) = G(f) * \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{\tau}) \quad (1),$$

vagyis

$$G_d(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(f - \frac{k}{\tau}) \quad (2).$$

A kifejezés jobb oldala szerint a digitalizált jel spektruma periodikus, ami azért érdekes, mert aperiodikus, folytonos függvények spektruma (vagyis az analóg adatrendszeré) nem periodikus függvény, vagyis a mintavételezés az eredetileg nem periodikus spektrumot periodikussá tette. A spektrumnak a  $-1/2\tau$  és  $1/2\tau$  közé eső részét a spektrum fő részének, az  $f_N = 1/2\tau$  értéket Nyquist-frekvenciának nevezzük. A spektrum többi részén a fő rész  $f_N$  periódussal ismétlődik.

A mintavételezés tehát megváltoztatta a digitális adatrendszer spektrumát az analóg jel spektrumához képest. Ha azt akarjuk, hogy a digitalizálás adatvesztés nélkül reprezentálhassa az analóg adatrendszert, akkor azonossá kell tenni a spektrumokat. Ezt úgy érhetjük el, hogy levágjuk a digitális adatrendszer Nyquist-intervallumán kívül eső spektrum részeket. Ez a művelet egy  $\tau$  magasságú és  $1/2\tau$  szélességű négyszögimpulzussal való szorzást jelent. Jelölje

$$\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$$

a négyszögfüggvényt. Ekkor a spektrumismétlődést megszüntető levágásra írható, hogy

$$G_d(f) \tau \square(f\tau) = G(f) \quad (3).$$

Így elértük, hogy az analóg és a digitális adatrendszer spektruma azonos lesz, amely egyben azt is jelenti, hogy a digitális adatrendszerből adatvesztés nélkül visszaállítható az analóg adatrendszer.

A mintavételezés azonban az időtartományban történik, ezért meg kell értenünk azt is, hogy az amúgy meglehetősen egyszerű művelet a frekvencia tartományban – mármint a spektrum fő részén kívüli tartomány levágása – mit jelent az időtartományban. A digitalizált adatrendszer levágott spektrumának inverz Fourier-transzformációjával

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_d(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau) \delta(t - k\tau) \quad (4),$$

valamint annak figyelembevételével, hogy

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tau \square(f\tau)\} = \text{sinc}(t/\tau - k) \quad (5),$$

a konvolúció-tétel alkalmazásával kapjuk

$$\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - k\tau) \right\} \text{sinc}(t/\tau) = \quad (6),$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau) \text{sinc}(t/\tau - k)$$

vagyis a visszaállított analóg függvényt a mintákkal szorzott sinc függvények összegeként kapjuk meg.

### Átmintavételezés

Előfordulhat, hogy valamely okból egy létező adatrendszert egy másik mintavételi távolságra átvérve szeretnénk átalakítani. Ha csökkentjük a mintavételi távolságot, akkor sűrítést, ha növeljük, akkor ritkítást hajtunk végre. A sűrítés – amit gyakran interpolációnak is nevezünk – nem változtatja meg az adatrendszer spektrumát, de a ritkítás igen. A cikkben tárgyalt probléma szempontjából a ritkítás az érdekes, tehát most csak ennek hatásait igyekszünk áttekinteni.

Legyen  $\tau_e$  az eredeti és  $\tau_r$  a ritkított adatrendszer mintavételi távolságai! Mint tudjuk, az átvihető legnagyobb frekvencia ( $f_{fe}$ ) és a mintavételi távolság ( $\tau_e$ ) között fennáll a következő összefüggés:

$$\tau_e < 1 / 2f_{fe} \quad (7),$$

ami a ritkítás után is igaz, csak hogy egy másik felső határfrekvenciára, a ritkítás utánira ( $f_{fr}$ )

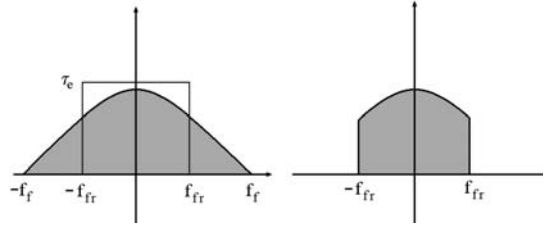
$$\tau_r < 1 / 2f_{fr} \quad (8).$$

A ritkítás utáni spektrumból az  $f_{fe}$  és az  $f_{fr}$  közötti frekvenciasáv hiányozni fog, mégpedig az 1. ábrán látható módon.

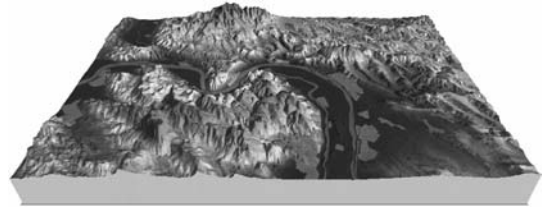
A ritkítás végrehajtását a (4), (5), (6) formulák alkalmazásával értük el, vagyis a ritkított függvényt az eredeti mintákkal szorzott sinc függvények összegeként kaptuk meg.

### Sűrű és ritka domborzati rácsok

Tekintsük meg a 2. ábrát, amin egy sűrűn mintavételezett magassági modellt láthatunk perspektivikusan ábrázolva! A 3. ábrán az előbbi terület rétegszínezéses térképét láthatjuk.



1. ábra Az ábra bal oldali részén a ritkítás előtti, a jobb oldali részén a ritkítás utáni spektrumot láthatjuk.  $f_{fe}$  az eredeti adatrendszer felső határfrekvenciája,  $f_{fr}$  a ritkítás utánié. A levágást egy  $2f_{fr}$  (azaz  $1/\tau_r$ ) hosszúságú és  $\tau_e$  magasságú négyszögfüggvénnyel végeztük.



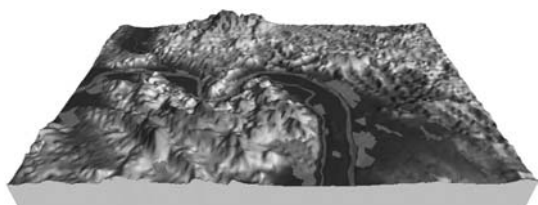
2. ábra Az eredeti adatrendszer 3 dimenziós, perspektivikus megjelenítéssel. A mintavételi távolság 50 m.



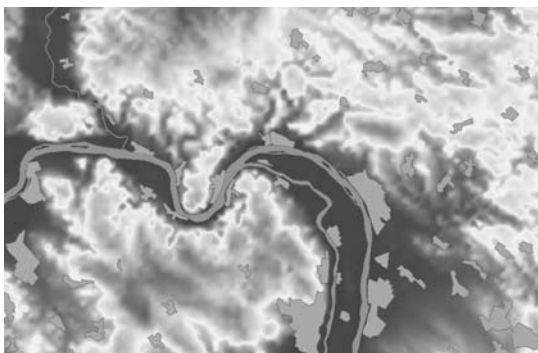
3. ábra Az eredeti adatrendszer rétegszínezéses megjelenítéssel. A mintavételi távolság 50 m.

Hajtsunk végre erőteljes adatritkítást a szabályos rácsban rendelkezésre álló magassági adatbázison! Növeljük például 10 szeresére a mintavételi távolságot! A mintavételi tételből tudjuk, hogy ez által el fogjuk veszíteni a jel spektrumából az  $1/20$ -nál nagyobb frekvenciákat, vagyis simító szűrést hajtunk végre az adatrendszeren, ezáltal el fognak tűnni a domborzatból a gyors változások, kisebb kiterjedésű egyenetlenségek. Amikor hagyományos módon generalizál a térképész, pontosan ilyen műveletet hajt végre.

A 4. ábra a ritkított adatrendszerből számított magassági modellt mutatja perspektivikusan, míg az 5. ábra ugyanezt rétegszínezéssel ábrázolva.



4. ábra A ritkított adatrendszer 3 dimenziós, perspektivikus megjelenítéssel. A mintavételi távolság 500 m.



5. ábra A ritkított adatrendszer rétegszínezéssel megjelenítéssel. A mintavételi távolság 500 m.

A ritkítás által egy olyan eljáráshoz juthatunk, amely a generalizálást nem szubjektív ismérvek alapján végzi el, hanem a fizikai felfogásunkhoz legközelebb álló, automatikus módon, tehát mindig ugyanúgy, reprodukálhatóan.

Az ismertett eljárásra írt programok egyelőre kísérleti jellegűek. Ahhoz, hogy technológizált módon működjenek, még számos szoftverkonstrukciós részletkérdést kell megoldani, amik azonban nem érintik a módszer lényegét.

A magassági modelleket Intergraph Geomediával készítettük.

A cikk adatforrása a HM Térképészeti Kht. DDM 50 adatbázisa volt.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Bellanger, M.: „Digital Processing of Signals, Theory and Practice”, John Wiley and Sons, 1986
2. Smith, S.: „Digital Signal Processing”, Elsevier Science, 2003
3. Longley, R.–Goodchild M.–Maguire, D.–Rhind, D.: „Geographic Information, Systems and Science”, Wiley, 2002
4. Meskó A.: „A digitális szeizmikus feldolgozás alapjai”, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975
5. Meskó A.: „Geofizikai adatfeldolgozás I., lineáris átalakítások”, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983
6. Richards, J. F.: „Remote sensing Digital image analysis”, Springer-Verlag, 1986, Australia
7. Duncan, J.: „Bevezetés a komplex függvénytanba”, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1974
8. Cristescu, R.–Marinescu, G.: „Bevezetés a disztribúció elméletbe”, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1969

## Elevation models and the sampling theory, Part II.

I. Elek  
Summary

This paper presents an automatic generalisation method for elevation databases based on the sampling theorem. In this context the controlled generalisation process means resembling from a smaller sampling rate to a bigger one. The magnification of the sampling rate, that produces the generalisation, makes the elevation model smoother regarding the removed higher frequencies.