Domborzati modellek és a mintavételi tétel (I. rész)

Elek István egyetemi docens,
ELTE Informatikai Kar, Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék,
MTA Térképtudományi és Geoinformatikai Kutatócsoport

Bevezetés

A digitális domborzati modellekkel operáló szoftverek előszeretettel használnak szabályos rácsban tárolt magassági adatokat. Ez a forma egyszerű, mind a megjelenítés, mind a számolások számára kézenfekvő. Ezt a modellt vizsgáljuk meg a jelfeldolgozásban jól ismert mintavételi tétel szempontjából.

Először vázlatosan áttekintjük a mintavételezés folyamatát, majd ismertetünk néhány következtetést.

Mintavételezés

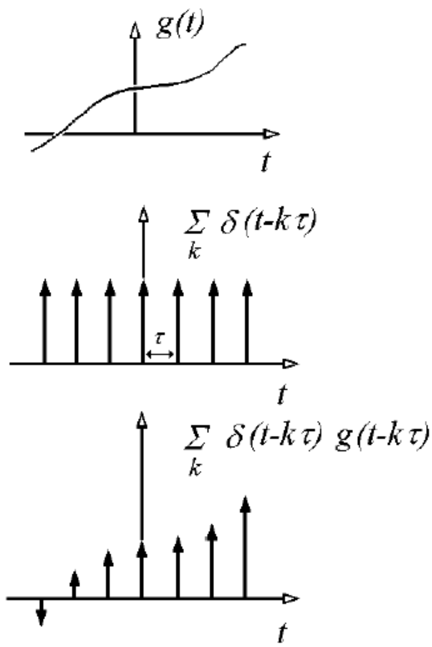
A szaktudományokban alapvető jelentőségű az adatnyerés folyamata, amely a technika mai színvonalán digitális adatnyerést vagy mintavételezést jelent. Mintavételezéskor gyakran analóg jelekből állítunk elő digitális adatokat, máskor eleve diszkrét, esetleg nem szabályosan elhelyezkedő mintavételi pontokban történik az adatnyerés. A mintavételezés folyamatának megértése nagy jelentőségű, mivel az adatokból levonható következtetések függhetnek a mintavételezés módjától.

Képzeljük el a mintavételezést, mint egy kétállású kapcsolóval szabályozott mérő berendezést, amely bekapcsolt állapotban rögzíti a mérendő paramétert, kikapcsolt állapotban pedig mit sem tud a környezetéről. Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy két mintavételi (idő)pont között bármi történik is, arról nem fogunk tudomást szerezni, mivel mérő berendezésünk ilyenkor kikapcsolt állapotban van. Belátható, hogy ez a fajta hiányosság csökkenthető, ha sűrítjük a mintavétel gyakoriságát, vagyis csökkentjük az érzékelés nélkül töltött üzemmód részarányát a működő állapothoz képest. Nevezzük mintavételi távolságnak két érzékelés közötti intervallumot, amely, ha idősorokról van szó, akkor idő dimenziójú, de lehet távolság dimenziójú is, ha két mintavételi pont között térbeli távolságról van szó!

A következőkben vázlatosan áttekintjük a mintavételezés legfontosabb törvényszerűségeit, egyenletes mintavételezést feltételező esetekben. Az egyszerűség kedvéért idősorokkal, vagyis egy dimenziós problémákkal foglalkozunk, amik teljes mértékben általánosíthatók többdimenziós esetekre is, mint amilyenek a terepmodellek.

Mintavételi tétel

Legyen τ az úgynevezett mintavételi távolság. Ábrázoljuk a *g(t)* időfüggvényt és a mintavételezés eszközét, a Dirac impulzusok sorozatát, majd a mintavételezés eredményét, a digitalizált időfüggvényt (*1. ábra*).



1. ábra Az analóg függvény, a Dirac impulzus sorozat és a digitalizált jel. A mintavételezés eredménye egy olyan impulzus sorozat, melynek tagjai az eredeti függvénynek a mintavételi helyeken felvett értékei.

A mintavételezés tehát nem más, mint a *g(t)* időfüggvény és a Dirac impulzus sorozat szorzata:

$$g(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(k\tau)\delta(t-k\tau)$$

Vizsgáljuk meg az analóg függvény és a mintavételezett spektrumát! Jelöljük *G(f)*-fel az eredeti és $G_d(f)$-fel a digitalizált függvény spektrumát! A Dirac-δ Fourier-transzformáltjának és a konvolúció tételeknek felhasználásával felírható a mintavételezett függvény spektruma:

$$G_d(f)=G(f)*\frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{k}{\tau})$$

vagyis

$$G_d(f)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(f-\frac{k}{\tau})$$

Értelmezzük a kapott eredményt! A kifejezés jobb oldala szerint a digitalizált jel spektruma periodikus, ami azért érdekes, mert aperiodikus függvények (vagy más néven tranziens függvények) spektruma nem periodikus függvény, vagyis a mintavételezés az eredetileg nem periodikus spektrumot periodikussá teszi. A spektrumnak a $-1/2\tau$ és $1/2\tau$ közé eső részét a spektrum fő részének, az $f_N = 1/2\tau$ értéket Nyquist-frekvenciának nevezzük. A spektrum többi részén a fő rész f_N periódussal ismétlődik. A fenti formulákból világosan kiolvasható, hogy az analóg és a digitalizált függvény spektruma jelentősen eltérhet egymástól, ha az analóg függvény tetszőleges frekvenciájú jeleket is tartalmazhat. Ha azonban létezik egy olyan felső határfrekvencia (f_f), amelynél nagyobb frekvenciájú jel nem fordulhat elő (vagyis létezik a spektrumra felső határfrekvencia), akkor belátható, hogy a felső határfrekvencia és a τ mintavételi távolsággal még átvihető legnagyobb frekvencia között igaz a következő összefüggés:

$f_f <= f_N$,

vagyis

$\tau <= 1/(2 f_f)$.

Ez az összefüggés a mintavételi tétel. Jelentése, hogy mintavételezéskor a még átvihető legnagyobb frekvenciához, f_f-hez úgy kell megválasztanunk a mintavételi távolságot (τ), hogy teljesüljön a mintavételi tétel. Ha ennél kisebbre választjuk a mintavételi távolságot, akkor feleslegesen sűrűn mintavételezett adatrendszert kapunk, ha pedig ennél nagyobbra választjuk, akkor nem fog teljesülni az f_f felső határfrekvencia szerinti jelátvitel. Túlzottan ritka mintavételezéssel tehát felülvágást fogunk végrehajtani az adatrendszer spektrumán.

A mintavételi tétel néhány következménye

Láthattuk, hogy bizonyos esetekben a digitalizálás (mintavételezés) adatvesztéssel járhat. Tekintsük át, hogy mikor nem vesztünk adatot (mikor veszünk észre mindent)! A megfelelően mintavételezett digitális adatrendszerből az eredeti analóg jel (jelen esetben a felszín) pontosan visszaállítható. Akkor mondjuk megfelelően mintavételezettnek az adatrendszert, ha teljesült a mintavételi tétel. Az előző részben láthattuk, hogy a mintavételezés periodikussá teszi a spektrumot. Ha pontosan vissza kívánjuk állítani az eredeti analóg jelet a mintavételezett jel spektrumából »$G_d(f)$«, akkor el kell tüntetnünk a spektrum fő részein kívüli részeit, vagyis meg kell szoroznunk $G_d(f)$-t egy olyan négyszög függvénnyel, amelynek magassága τ, szélessége 1/τ. Így egyszerűen levágjuk a spektrum periodikus részeit, vagyis kiküszöböljük a mintavételezéssel belevitt periodicitást, vagyis visszakapjuk az analóg jel spektrumát.

Az ismertetett gondolatmenet akkor adja vissza a jelet az idő tartományban, ha a visszakapott spektrumot inverz Fourier-transzformáljuk. Ismerve a konvolúció tulajdonságait és a négyszögfüggvény (inverz) Fourier-transzformáltját, belátható, hogy a τ magasságú és 1/τ szélességű négyszögfüggvénnyel való szorzás a frekvencia tartományban a *sinc* függvénnyel való konvolúciót jelent az időtartományban. Ez alapján a jel visszaállítása az időtartományban a következő módon lehetséges:

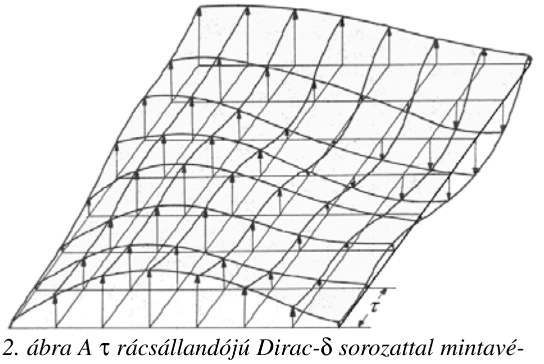
$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(t)\delta(t-k\tau)\right)sinc(t/\tau)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(k\tau)sinc(t/\tau-k)$$

vagyis a visszaállított értékek a minták és a sinc függvény megfelelő argumentummal vett értékeinek szorzatai. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az így visszakapott értékek pontosan azonosak az egyes minták értékeivel, valamint az analóg függvény tetszőleges helyén felvett értékek előállíthatók a mintáknak és a megfelelő argumentummal megadott sinc függvényértékek szorzatának összegzésével. Természetesen csak akkor igazak ezek a megállapítások, ha teljesült a mintavételi tétel. Túl nagyra választott mintavételi távolság esetén az analóg jel spektruma nem állítható vissza pontosan, mivel a túl ritka mintavétel felülvágást hajtott végre a spektrumban.

Domborzati modellek

A domborzati modellek megalkotásának egyik fontos állomása, hogy ismerjük szabályos rácspontokban a felszíni magasság értékeket. Ezen adatnyerési technikák ismertetését mellőznénk, ugyanakkor fontosnak tartjuk kiemelni a mintavételi tétel ide vonatkozó következményeit. A magasság értékek egy, a felszínt leíró analóg függvénynek egy τ rácsállandójú Dirac impulzus sorozattal való szorzásával kaphatók meg (*2. ábra*).

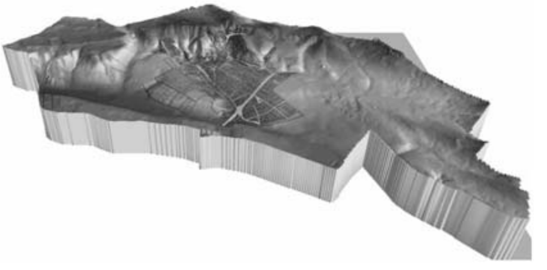


2. ábra A τ *rácsállandójú Dirac-*δ *sorozattal mintavételezett felszín*

Ebből kézenfekvően adódik, hogy a τ hosszúságú mintavételezéssel nem tudunk kimutatni 2τ -nál kisebb méretű terepi képződményeket.

A *3. ábrá*n egy valóságos domborzati modellt láthatunk, amelynek felbontóképessége kb. 5m, amivel a mintavételi tétel miatt 10 m-nél kisebb horizontális kiterjedésű felszíni egyenetlenség nem mutatható ki. Ezért csak építészeti, várostervezési célú felhasználása javasolt. Ha például a felhőszakadások alkalmával lezúduló csapadékvíz lefolyását kívánnánk modellezni, akkor pontosabb (kisebb mintavételi távolságú) domborzati modellt kellene megalkotni.

Ha mindezt árvízveszélyes területre vonatkoztatjuk, akkor belátható, hogy egy, a fenti pontosságnak eleget tevő magassági modell két mintavételi pontja között mit sem tudunk a terep alakulásáról. Így az árvízvédelmi töltésen két, egymástól 10 méterre lévő mintavételi pont között nem fogjuk tudni megmondani, hogy ott milyen magassági értékek vannak, márpedig ez nem engedhető meg. Erre a célra sokkal sűrűbben mintavételezett magassági modell kell.



3. ábra Egy domborzati modell perspektivikus megjelenése. A település digitális térképe rá van feszítve a felszínre.

Általánosságban kimondható, hogy nincsenek univerzálisan, minden célra alkalmas domborzati modellek. A pontossággal szembeni elvárások eltérő mivolta egyben különböző mintavételezési kritériumokat is jelent. Ezért fordulhat elő, hogy ami a telekommunikáció számára megfelelően pontos domborzati modell, az árvízvédelem számára nem az.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. *Bellanger, M.*: Digital Processing of Signals, Theory and Practice, John Wiley and Sons, 1986
2. *Smith, S.*: Digital Signal Processing, Elsevier Science, 2003
3. *Longley, R.–Goodchild, M.–Maguire, D.–Rhind, D.*: Geographic Information, Systems and Sciense, Wiley, 2002
4. *Meskó A.*: A digitális szeizmikus feldolgozás alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975
5. *Meskó A.*: Geofizikai adatfeldolgozás I., lineáris átalakítások, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983
6. *Richards, J. F.*: Remote sensing Digital image analysis, Springer-Verlag, 1986, Australia
7. *Duncan, J.*: Bevezetés a komplex függvénytanba, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1974
8. *Cristescu, R.–Marinescu, G.*: Bevezetés a disztribúció elméletbe, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1969

Elevation models and the sampling theory, Part I.

I. Elek

Summary

The digital terrain modeling softwares preferes elevation data in grid form. This kind of structure is simple but obvious not only for display but computation as well. The aim of this paper is to outline the essential relationship between the accuracies of elevation models, their sampling rate, and the well known mathematical model of sampling. Some basic sampling concept will introduced such as Nyquist-frequency, upper limit frequency of signals, time domain, frequency domain and so on. Regarding the sampling theory we declare some important statement on elevation models and their properties.