



A legjobb vízszintes illeszkedést biztosító Molodensky-paraméterek meghatározása azonos pontok adatai alapján



Molnár Gábor–dr. Timár Gábor
ELTE Geofizikai Tanszék, Úrkutató Csoport

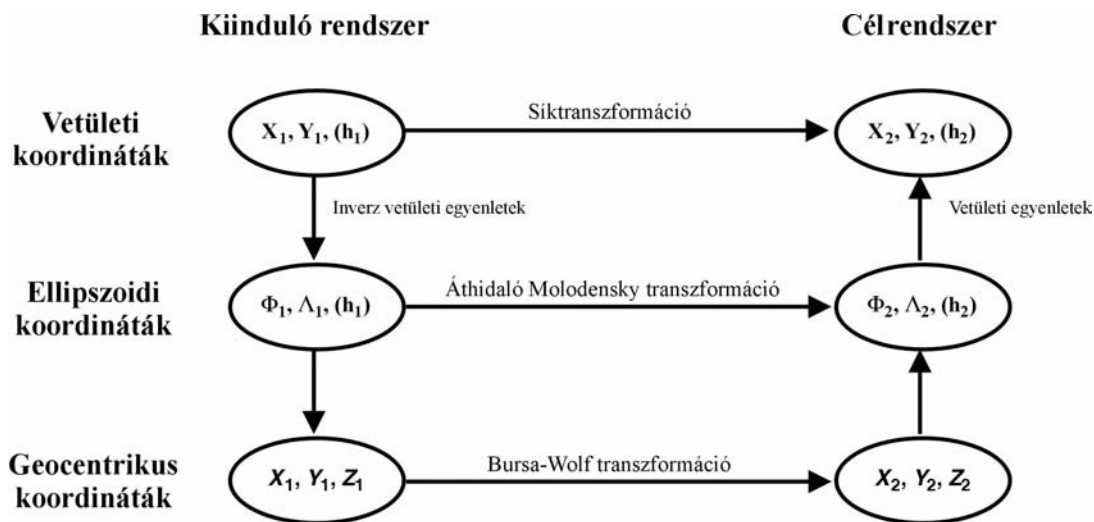
1. Bevezetés

A térinformatika egyik alapvető feladata különböző vetületi rendszerekben referált adatok, térképek egymáshoz illesztése, közös bázisra hozatala. A koordináták transzformációja több módon történhet (1. ábra). Az itt bemutatott 1. transzformáció közvetlenül a vetületi rendszerek között teremt kapcsolatot, ennek gyakorlati megvalósítása legtöbbször hatványpolinom-sorokkal történik (Varga, 1981). A második eset, azaz a különböző alapfelületeken, idegen szóval dátumokon értelmezett ellipszoidi és magassági koordináták közvetlen átszámítása, a fenti módszeren túl a szabványos, ill.

gatási szögek esetén érvényes egyszerűsítése, az ún. Burša–Wolf-transzformáció (Burša, 1962; Wolf, 1963) segítségével tesszük meg.

Az 1. ábrán látható további átalakítások a következők: a választott vetület direkt és inverz egyenletei, ezek általában kézikönyvekben (pl. Snyder, 1987; Varga, 2000) megtalálhatók. Az ellipszoidi koordináták geocentrikussá történő átváltását elemi matematikai eszközökkel egyszerűen elvégezhethetjük (lásd a (9)–(11) egyenleteket). Ennek inverzét egyszerű közelítő formulákkal Bowring (1976), némileg összetettebb egzakt megoldását Borkowski (1989) megadta.

Az áthidaló Molodensky-formulák az alapfelü-



1. ábra Koordináta-átszámítások a vetülettanban

az áthidaló Molodensky-formulákkal is lehetséges (Molodensky et al., 1960; magyar összefoglalást lásd Timár et al., 2002). Végül a harmadik átváltást, amely a geocentrikus koordináták között teremt kapcsolatot, a gyakorlatban leginkább a háromdimenziós Helmert-transzformáció kis elfor-

letti ellipszoidok egymáshoz képest értelmezett relatív helyzetét a középpontokat összekötő vektor 3 eltolási komponensével jellemzik, és nem veszik figyelembe az esetleges eltérő tájékozást, ill. a méretarány kis eltérését, így háromparaméteres dátumtranszformáció néven is ismertek. Az itt elhanyagolt tényezőket is tekintetbe veszi a Bursa-

Wolf eljárás, amely a 3 eltolási tag mellett 3 elforgatási és egy méretarány-paramétert is tartalmazva kapja a hétparaméteres dátumtranszformáció elnevezést. Mindkét transzformáció paramétereit (és a hatványpolinom-sorokkal történő átváltásait is) a gyakorlatban azonos pontok, legtöbbször a kiinduló – és a célrendszerben is ismert – koordinátájú felsőrendű alappontok felhasználásával határozhatjuk meg. A térben legjobb hétparaméteres transzformáció paramétereinek meghatározását *Ádám* (1982) megadta, annak gyakorlati alkalmazására példát mutatnak *Papp et al.* (1997; 2002). A jelen munka célja a vízszintes értelemben legjobb illeszkedést adó Molodensky-paraméterek megbecslése, ismert alappontsokaság koordinátái alapján. A dolgozat nem tér ki a legjobb térbeli illeszkedést eredményező Molodensky-paraméterek kiszámítására, amelyet egy korábbi írásunkban (*Timár et al.*, 2002) már ismertettünk.

2. Kiinduló adatok

Az áthidaló Molodensky-formulák – nevükből is láthatóan – képesek közvetlenül a kiinduló és a céldátumon értelmezett ellipszoidi koordináták, ill. ellipszoidi magasságok között kapcsolatot teremteni. A vizsgálatba vont két dátum közötti eltolási paraméterek meghatározása tehát ez esetben azonos pontok ellipszoidi koordinátáit igényli, mind a kiinduló, mind a céldátumon. A gyakorlatban általában alacsony rendszámú geodéziai alappontokat használunk azonos pontokként, amelyek koordinátái legtöbbször valamely jól definiált vetületi rendszerben adóttak. Ezért itt az inverz vetületi egyenletek alkalmazása szükséges, hogy a megfelelő kiinduló adatokhoz jussunk.

3. A módszer

Az áthidaló Molodensky-formulák (DMA, 1990):

$$\Delta\Phi'' = \frac{-dX \sin \Phi \cos \Lambda - dY \sin \Phi \sin \Lambda + dZ \cos \Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \sin 2\Phi}{M \sin I''} \quad (1)$$

$$\Delta\Lambda'' = \frac{-dX \sin \Lambda + dY \cos \Lambda}{N \cos \Phi \sin I''} \quad (2)$$

$$\Delta h = dX \cos \Phi \cos \Lambda + dY \cos \Phi \sin \Lambda + dZ \sin \Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \sin^2 \Phi - da, \quad (3)$$

$$M(\Phi) = a \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}$$

ahol $M(\Phi)$ a meridiángörbületi sugár;

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$$

ahol $N(\Phi)$ a harántgörbületi sugár, DF'' és DL'' a kiinduló, ill. a céldátumon értelmezett szélesség-, ill. hosszúságkülönbség szögmásodpercben, Dh a kiinduló és a céldátumon értelmezett ellipszoidmagasságok különbsége, f a kiinduló ellipszoid lapultsága, da és df a kiinduló és célellipszoidok fél-nagy tengely-, ill. lapultság-eltérése, e az ellipszoid excentricitása.

Az áthidaló Molodensky-formulák dX , dY és dZ paramétereinek meghatározásához azonos pontokra van szükségünk. Az azonos pontok kiinduló (1) és célrendszerbeli (2) ellipszoidi koordinátái különbségének a mért, illetve a transzformáció segítségével számított értékei eltérésének abszolút értékét akarjuk minimalizálni. Ez megegyezik a mért és számított mennyiségek eltérésének e négyzetösszege minimalizálásával. Esetünkben ennek matematikai megfogalmazása az alábbi:

$$\sum_{i=1}^N (\Phi_2^{(i)} - \Phi_1^{(i)} + \Delta\Phi''^{(i)}(\Phi_1, \Lambda_1))^2 + \sum_{i=1}^N (\cos \Phi_1^{(i)} \cdot (\Lambda_2^{(i)} - \Lambda_1^{(i)} + \Delta\Lambda''^{(i)}(\Phi_1, \Lambda_1)))^2 = \min \quad (4)$$

Látható, hogy a L – ellipszoidi hosszúság – értékek eltérését a $\cos(\Phi)$ skálázó taggal is megszorítottuk. A skálázó tagot azért kell alkalmazni, hogy ne egyszerűen az ellipszoidi koordináták eltérésének a minimumát, hanem az ellipszoid koordinátákból a vetületi egyenletek segítségével számított síkkordináták eltérésének a minimumát kapjuk. A skálázó tag alkalmazásának hatására lesz az azonos pontokban a síkkordináták számított és mért értékeinek szórása (közel) azonos az X és Y koordináták esetében. A síkbeli eltérésekre vonatkozó minimum feltétele az, hogy az (1) és (2) egyenletekben fellépő eltérések négyzetösszegeinek a paraméterek szerinti parciális deriváltjai nullák legyenek.

4. Eredmények

A parciális deriválások elvégzése és a $C=a \cdot df + f \cdot da$ (5) behelyettesítés után a (4) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\overline{\mathbf{A}\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}, \quad (6)$$

ahol az \mathbf{A} szimmetrikus mátrix és a \mathbf{b} vektor elemei:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\sin \Phi^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} \right)^2 + \left(\frac{\sin \Lambda^{(i)}}{N^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin 1''} \right)^2 \right] \\ A_{12} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sin^2 \Phi^{(i)} \sin \Lambda^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} - \frac{\sin \Lambda^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{(N^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin 1'')^2} \right] \\ A_{13} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{-\sin \Phi^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} \right] \\ A_{22} &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\sin \Phi^{(i)} \sin \Lambda^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} \right)^2 + \left(\frac{\cos \Lambda^{(i)}}{N^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin 1''} \right)^2 \right] \\ A_{23} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{-\sin \Phi^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin \Lambda^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} \right] \\ A_{33} &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\cos \Phi^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} \right)^2 \right] \\ b_1 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{-\Delta \Phi^{(i)} \sin \Phi^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} + \frac{C \sin 2\Phi^{(i)} \sin \Phi^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} - \frac{\Delta \Lambda^{(i)} \sin \Lambda^{(i)}}{N^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin 1''} \right] \\ b_2 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{-\Delta \Phi^{(i)} \sin \Phi^{(i)} \sin \Lambda^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} + \frac{C \sin 2\Phi^{(i)} \sin \Phi^{(i)} \sin \Lambda^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} + \frac{\Delta \Lambda^{(i)} \cos \Lambda^{(i)}}{N^{(i)} \cos \Phi^{(i)} \sin 1''} \right] \\ b_3 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta \Phi^{(i)} \cos \Phi^{(i)}}{M^{(i)} \sin 1''} - \frac{C \sin 2\Phi^{(i)} \cos \Phi^{(i)}}{(M^{(i)} \sin 1'')^2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

A (7) egyenletben minden koordináta, ill. származtatott mennyiség (görbületi sugarak stb.) a kinululó rendszerben értendő. DF , DL jelentése az (1) és (2) egyenleteknek megfelelő.

A (7) egyenlet inhomogén lineáris egyenletrendszer. Ennek megoldása

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}, \quad (8)$$

ahol \mathbf{A}^{-1} az \mathbf{A} mátrix inverze. A keresett dX , dY és dZ paramétereket az \mathbf{x} megoldásvektor tartalmazza. A gyakorlatban mi a paramétereket más úton,

a Cramer-szabály felhasználásával (lásd pl. Korn és Korn, 1975) határoztuk meg. Először kiszámítottuk az \mathbf{A} mátrix determinánsát. Ezután létrehoztunk három további mátrixot úgy, hogy a \mathbf{b} oszlopvektorral az \mathbf{A} mátrix 3 oszlopának értékeit rendre felülírtuk, míg a többi tagot változatlanul hagytuk. A keresett paraméterek rendre e három mátrix determinánsainak és az eredeti \mathbf{A} mátrix determinánsának hányadosaiként álltak elő.

5. Diskusszió

Az 1. táblázatban megadjuk a HD72 » WGS84 transzformáció paraméterezését mind a térben egzakt, mind a legjobb vízszintes illeszkedést biztosító módon. Az utóbbi modellhez tartozó paramétereket 100 db OGPSH alappont adatait felhasználva, a dolgozatban ismertetett számítási módszerrel kaptuk. Látható, hogy e paraméterek segítségével vízszintes értelemben valóban pontosabb illeszkedést kaphatunk, mint a térben egzakt elhelyezést biztosítókkal (Timár et al., 2002). Fontos megjegyezni ugyanakkor, hogy a kapott hibák nagyságrendje meghatározza a módszer korlátait is: országosan egységes paraméterek használatával e módon sem érhető el geodéziai szintű pontosságú koordináta-transzformáció. A most ismertetett módon megkapható paraméterek jól használhatók viszont a térinformatikában.

| Transzformáció | dX(m) | dY(m) | dZ(m) | Vízsz. hiba(m) | |
|-----------------------------|-------|--------|--------|----------------|------|
| Direkt eltolás | | | | átlag | max |
| HD72 » WGS84 | 57,01 | -69,97 | -9,29 | 0,40 | 1,00 |
| áthidaló Molodenszky | | | | átlag | max |
| HD72 » WGS84 | 57,17 | -71,82 | -14,90 | 0,36 | 0,83 |

1. táblázat A HD72 » WGS84 transzformáció paraméterei a térben egzakt (direkt eltolás) és a vízszintes értelemben optimális (áthidaló Molodenszky) modellek alkalmazásával

Végezetül vizsgáljuk meg, hogy az 1. táblázatban megadott transzformációkkal jellemzett dátumok milyen térbeli helyzetben vannak egymáshoz képest.

Képezzük a két helyvektor háromdimenziós különbségét:

$$\mathbf{r}_{\text{diff}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (dX_{\text{diff}}=4,84 \text{ m}; dY_{\text{diff}}=1,85 \text{ m}; dZ_{\text{diff}}=5,61 \text{ m}) \quad (9)$$

Lássuk, ez a helyvektor a középpontból az alapelület milyen szélességgel és hosszúsággal megadott pontjára mutat:

$$\varphi_r = \arctan\left(\frac{dZ_{\text{diff}}}{\sqrt{dX_{\text{diff}}^2 + dY_{\text{diff}}^2}}\right) \approx 47,3^\circ \quad (10)$$

$$\lambda_r = \arctan\left(\frac{dY_{\text{diff}}}{dX_{\text{diff}}}\right) \approx 20,2^\circ, \quad (11)$$

míg a helyvektor hossza (a háromdimenziós eltérés, méterben):

$$|\mathbf{r}_{\text{diff}}| = \sqrt{dX_{\text{diff}}^2 + dY_{\text{diff}}^2 + dZ_{\text{diff}}^2} = 7,64 \text{ m} \quad (12)$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a két paramétersor használata vízszintes értelemben a (10) és (11) egyenletekkel megadott ponton ad azonos eredményt. A (12) egyenletben megadott térbeli eltolás mértéke a HD72 alapelületnek a geoidhoz képest definiált magassági helyzetére (Ádám et al., 2000) utal.

6. Összefoglalás

Az (1)–(8) összefüggések alkalmazásával, amennyiben egy pontsokaság (pl. geodéziai alapponok egy csoportja) két független alapelületen adott koordinátákkal ismert, a megadott egyenletek alkalmasak arra, hogy a GPS és térinformatikai gyakorlatban használt áthidaló Molodensky-paramétereket az adott pontokon minimális vízszintes eltérést eredményező módon megbecsüljük. A megoldás háromdimenziós értelemben nem szükségszerűen pontos, de a kapott paraméterek vízszintes értelemben pontosabbak a térbelileg helyes megoldásénál. A paraméterek geodéziai pontosságigényű transzformációt általában nem tesznek lehetővé, a térinformatikában azonban jól alkalmazhatók, és különösen akkor használhatók a háromparaméteres dátumleírások megadására, ha

a paraméterbecsléshez felhasznált pontsokaság magassági referenciái nem adottak.

Köszönetnyilvánítás

A jelen dolgozat elkészítését a Magyar Űrkutatási Iroda és az Informatikai és Hírközlési Minisztérium közös, TP094 sz. témapályázata keretében végeztük. A HD72 » WGS84 transzformációk paramétereinek kiszámítását a FÖMI KGO-tól kizárólag kutatási célra átvett 100 db OGPSh-alappon adatai alapján végeztük el.

IRODALOM

- Ádám, J. (1982): On the determination of similarity coordinate transformation parameters. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini* 41: 283–290.
- Ádám J.–Gazsó M.–Kenyeres A.–Virág G.: 2000. Az Állami Földmérésnél 1969 és 1999 között végzett geoidmeghatározási munkálatok. *Geodézia és Kartográfia* 52(2): 7–14.
- Badekas, J.: (1969): Investigations related to the establishment of a world geodetic system. Report 124, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus
- Borkowski, K. M. (1989): Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. *Bulletin Géodésique* vol. 63: 50–56.
- Bowring, B. (1976): Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review* XXIII: 323–327.
- Burša, M. (1962): The theory for the determination of the non-parallelism of the minor axis of the reference ellipsoid and the inertial polar axis of the Earth, and the planes of the initial astronomical and geodetic meridians from the observation of artificial Earth satellites. *Studia Geophysica et Geodetica* 6: 209–214.
- Defense Mapping Agency (1990): Datums, Ellipsoids, Grids and Grid Reference Systems. DMA Technical Manual 8358.1. Fairfax, Virginia, USA
- Korn, G. A.–Korn, T. M. (1975): Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 995 o.
- Molodenskiy, M. S.–Eremeev, V. F.–Yurkina, M. I. (1960): Metody izucheniya vnesnego gravitacionnogo polya i figuri Zemli. Tr. CNIIGAIK [Moszkva], 131.
- Papp, E.–Szűcs, L.–Varga, J. (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, No. 4 (27)

Papp, E.–Szűcs, L.–Varga, J. (2002): Hungarian GPS network transformation into different datums and projection systems. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.* 46(2): 199–204.

Snyder, J. P. (1987): *Map Projections - A Working Manual*. USGS Prof. Paper 1395: 1–261.

Timár G.–Molnár G.–Pásztor Sz. (2002): A WGS84 és HD72 alapfelületek közötti transzformáció Molodensky-Badekas-féle (3 paraméteres) meghatározása a gyakorlat számára. *Geodézia és Kartográfia* 54(1): 11–16.

Varga J. (1981): *Vetületi rendszereink közötti átszámítások új módjai*. Műszaki doktori értekezés, BME, Budapest

Varga J. (2000): *Vetülettan*. Műegyetemi Kiadó, Bp., 296 o.

Wolf, H. (1963): Geometric connection and re-orientation of three-dimensional triangulation nets. *Bulletin Géodésique* nr. 68: 165–169.

Determination of the parameters of the abridged Molodensky formulae providing the best horizontal fit

G. Molnár–G. Timár
Summary

This paper gives the computation algorithms of the unknown datum shift parameters of the horizontally optimised abridged Molodensky datum transformation. If the coordinates of a geodetic basepoint set are given in two independent systems (datums), the given formulae are capable to estimate the dX, dY and dZ datum shift parameters of the abridged Molodensky transformation. Using these formulae, the parameters, providing the best horizontal fitting, of the HD72»WGS84 transformation have been estimated as follows: dX=+52.17 m.; dY=-71.82 m.; dZ=-14.90 m. The location difference between the spatially exact datum and the one characterised by this parameter set are discussed and the shift between them is interpreted as a result of the artificial height position of the HD72 above the geoid.

Földmérési és Távérzékelési Intézet

K-GEO Akkreditált Kalibráló Laboratórium

vállalja

GEODÉZIAI ELEKTROOPTIKAI TÁVMÉRŐK KALIBRÁLÁSÁT

Gödöllőn, az Országos Geodéziai Alapvonalon

és

GPS VEVŐBERENDEZÉSEK KALIBRÁLÁSÁT

Pencen, a GPS Kalibrációs Hálózatban.

2614 Penc, Kozmikus Geodéziai Observatórium

Tel: 06-27-374-980 Fax: 06-27-374-982

Email: borza,nemeth,virag@sgo.fomi.hu

Levelezési cím: 1373 Budapest, Pf. 546.