



Az EOV-alapfelületek térbeli helyzetének vizsgálata

Kratochvilla Krisztina – doktorandusz
BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Bevezetés

Az 1975-ben bevezetett EOV-ről sok mindent tudunk, de a vetítési folyamatban részt vevő alapfelületek térbeli elhelyezkedését lényegében nem ismerjük. Ez irányú tudásunkat kívánom gyarapítani jelen tanulmányommal. Első lépésben foglaljuk össze, mi is az, amit tudunk vetületi rendszereinkről.

Néhány évtizede, az alappont-meghatározási és térképezési munkálatok során, a sokféle létező vetületi rendszer alkalmazása számos nehézséget okozott a kor geodétáinak. A rend megteremtése érdekében, az Állami Földmérés – széles körű kutatómunkák eredményeképpen – bevezette az Egységes Országos Vetületi rendszert (EOV), amely a vízszintes értelmű geodéziai alaphálózat (EOVA), valamint az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) alapját képezi (Joó, 1972).

Alapfelületül az IUGG/1967 elnevezésű referencia ellipszoidot választották, amelyről a síkra kettős vetítéssel tértek át. A vetítés során az ellipszoidról először arra a közepes sugarú gömbre (új-magyarországi Gauss-gömbre) vetítettek, amely az ellipszoidot a $\phi = 47^\circ 10'$ földrajzi szélességű normálpárhuzamos egy pontjában érinti (Joó, 1972). Második lépésben a Gauss-gömbre egy ferdetengelyű redukált hengervetülettel tértek át. A redukciót az $m_0 = 0,99993$ értékű vetületi méretarány-tényező biztosítja, melynek következtében a hossztorzulási viszonyok kedvezőbbé váltak.

Az EOV vetületi kezdőpontja a Gellérthegy fel-

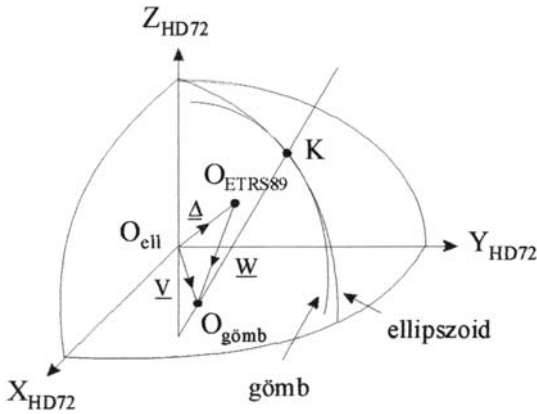
sőrendű ponton áthaladó kezdőmeridián
 $\phi = 47^\circ 10' 00''$ és $\lambda = 19^\circ 12' 54.8584''$

ellipszoidi földrajzi koordinátákkal jellemezhető pontja. A síkkoordináta-rendszer x tengelye a Gellérthegyi meridián képe, y tengelye pedig a kezdőmeridiánra merőleges legnagyobb gömbi főkör, a segédegyenlítő képe. A koordináta-rendszer ÉK-i tájékozású, melynek sajátossága, hogy az x és y tengelyeket önmagukkal párhuzamosan nyugatra, ill. délre 650, ill. 200 km-rel eltolták, annak érdekében, hogy csak pozitív koordinátákkal dolgozzunk az így kialakuló Y, X rendszerben (Joó, 1974).

Mivel a vetítési folyamat legérdekesebb lépése az ellipszoid gömbbel történő helyettesítése, vagy másképpen, a két felület egymáshoz viszonyított, kölcsönös helyzete, ezért vizsgálataimat is ez irányban folytattam.

A Gauss-gömb elhelyezkedése

Az új-magyarországi Gauss-gömb elhelyezkedése az IUGG/1967 referencia ellipszoid (középpontja: O_{ell}) térbeli derékszögű koordináta-rendszerében (\equiv HD72) matematikai megfontolások alapján egyszerűen meghatározható. Ezen felül, mivel a HD72 és az ETRS89 vonatkozási rendszerek közötti kapcsolat ismert (Ádám, 2000), a Gauss-gömb (középpontja: $O_{\text{gömb}}$) ETRS89 rendszerbeli, tehát a Föld tömegközéppontjához ($\equiv O_{\text{ETRS89}}$) viszonyított helyzete is megadható (1. ábra). Az ábrán K ponttal az EOV vetületi kezdőpontja szerepel.



1. ábra A Gauss-gömb elhelyezkedése a HD72 és az ETRS89 rendszerekben

A két vonatkozási rendszer kezdőpontját összekötő Δ vektor összetevői kiegyenlítőssel kapott transzformációs paraméterek (Kratochvilla, 2002). Az ellipszoid és a gömb középpontja közötti kapcsolatot biztosító v vektor komponensei a következőkben ismertetésre kerülő gondolatmenet alapján határozhatók meg.

A fenti bevezetőben említett módon, a kettős vetítés első lépéseként a Gauss-gömböt az IUGG/1967 ellipszoid egy pontjában érintő helyzetbe hozták. A gömb sugarát, amely nem más, mint a középgörbületi sugár, az érintési ponthoz tartozó haránt- (N) és meridián-irányú görbületi sugár (M) értékéből határozták meg a jól ismert kifejezés (Homoródi, 1966) felhasználásával:

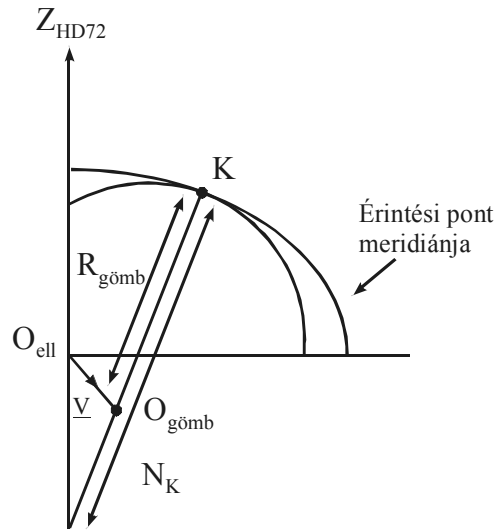
$$R = \sqrt{MN} \quad (1)$$

Mivel az érintési pontban (K) az ellipszoid és a gömb felületi normálisa egybeesik, a gömb középpontja meghatározható. Az ellipszoid esetében a normális a harántgörbületi sugár irányával és nagyságával adható meg, a gömbnél mindez a gömbsugárral jellemezhető (2. ábra).

Koordináta-geometriai módszerek és a felsőgeodézia ismert összefüggéseinek alkalmazásával számítható az ellipszoid és a gömb középpontját összekötő v vektor (Homoródi, 1966; Biró, 1996). (A vetületi kezdőpontot, ill. a számításokban szereplő pontokat ellipszoidi felületi pontokként kezeltem.) Tehát a Gauss-gömb középpontja megadható a HD72 vonatkozási rendszerben, valamint a Δ vektor ismeretében a Föld tömegközéppontjához képest, vagyis az ETRS89 rendszerben is.

A számítások során kapott vektorok az 1. táblázatban olvashatók.

A következő lépésben vizsgáljuk meg az ellipszoid és a gömb térben elfoglalt, kölcsönös hely-



2. ábra A gömbsugár és a harántgörbületi sugár kapcsolata

	v [m]	Δ [m]	w [m]
x	6381,086	-59,308	6440,393
y	2203,37	71,521	2131,716
z	-24087,726	21,979	-24109,705

1. táblázat

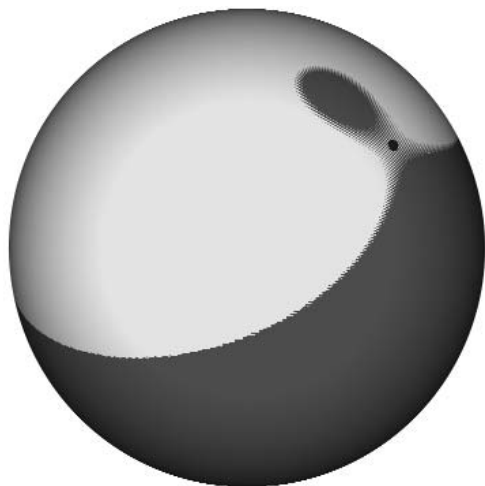
zetét. Láttuk, hogy a Gauss-gömb középpontja a gömb és az ellipszoid közös érintési pontjának (K) normálisán fekszik, így a $\phi < 90^\circ$ értékkel jellemzett földrajzi szélességű pontokban a görbületi sugarakra igaz a következő összefüggés:

$$M < R < N \quad (2)$$

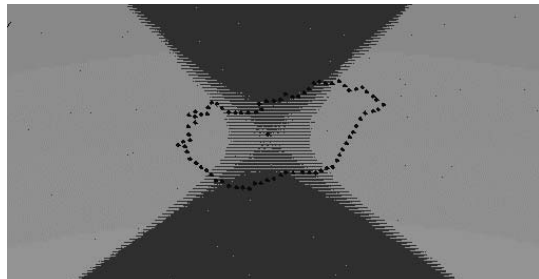
Mivel az érintési pontban a gömb sugara nagyobb, mint a meridián irányú görbületi sugár, az érintési ponttól délre az ellipszoid a gömbön belül helyezkedik el, mert a meridiánellipszis görbüllete az Egyenlítő felé haladva csökken. Északon viszont a földrajzi szélesség növekedésével az ellipszoid „ellaposodik”, ezzel párhuzamosan a meridián irányú görbületi sugár (M) nagysága is növekszik, míg eléri a konstans értékű gömbsugarat. Ez a pont esetünkben a gellérthegyi meridián $\phi = 56^\circ 17' 29,8538''$ földrajzi szélességű pontja. A görbületi középpont dél felé toródásából következik, hogy a két felület folyamatosan közeledik egymáshoz, míg végül a gömb eléri az ellipszoidot, és felszíne alá bukik. (Jordan et al. 1958)

Kelet-nyugati irányban a görbület mértékét meghatározó N harántgörbületi sugár nagyobb, mint a gömbsugár, emiatt az ellipszoid „beburkolja” a gömböt. A két felület egymáshoz viszonyított távolsága jelentős.

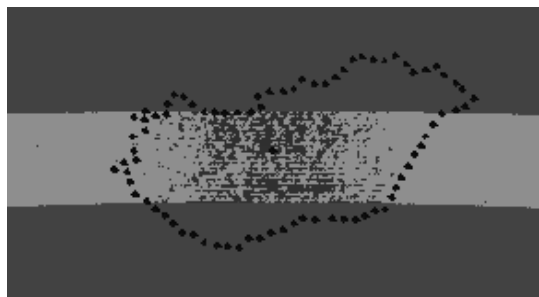
Az előbbi gondolatok képi megjelenítéseként tekintünk a következő ábrákat. Világos színnel az ellipszoid, sötétebbel a gömb látható (3a. és 3b. ábra). A 4. ábra pedig kiegészül az EOV-sík hengerpalástjával is. Az ábrák az érintési pontot szintén tartalmazzák.



3a. ábra Az IUGG67 ellipszoid és a Gauss-gömb áthatása



3b. ábra Az érintési pont környezete



4. ábra EOV-alapfelületek áthatása

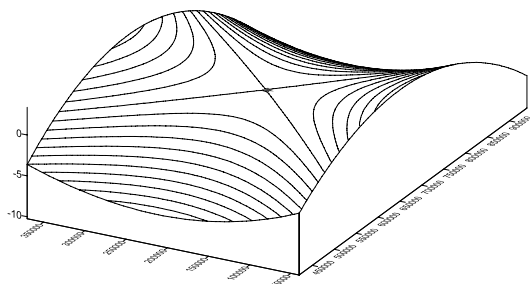
A 4. ábrán láthatók a metszési segédparalelkörök, amelyek a henger síkba fejtése után hossztorzulás-mentes (lineármódulus = 1) vonalakként képződnek le. A két vonal között hossz-

csökkenés keletkezik, amely maximális -7cm/km-értékét a segédegyenlítőn veszi fel. A torzulásmentes vonalaktól északra, ill. délre hossznagyobb lép fel, legnagyobb értékük északon +26, délen pedig +23cm/km.

Ellipszoid-gömb távolság

Az ellipszoid-gömb távolság meghatározását rácshálózati pontok felhasználásával végeztem. Az EOV-síkon Magyarország területét befoglaló téglalapot mindkét tengelyirányban 50-50 részre osztottam, ennek megfelelően a vizsgálatban 2601 rácspont vett részt. A rácspontok EOV koordinátáiból gömbi, majd ellipszoidi földrajzi koordinátákat számítottam. Ebből következik, hogy a vizsgálati pontok ellipszoidi felületi pontokként vettek részt a számítás folyamatában, mert valós adatok csak így kaphatók. Az ellipszoid-gömb távolságként a pontok ellipszoidi normálisán mért távolságot határoztam meg. A számítások eredményeinek izovonalas megjelenítéseként tekintünk az 5a. ábrát a hátsó külső borítón.

Az „alapszintköz” értéke 0,6 méter, ez az érték már elegendő pontossággal szemlélteti a pontokhoz rendelt ellipszoid-gömb távolságok nagyságát. Jól láthatóan az izovonalak segítségével egy nyeregfelület (ld. még 5b. ábra) írható le, mely már az előbbi áthatási ábrákon (3a., 3b., 4. ábra) is felsejlett.



5b. ábra A rácspontokhoz tartozó ellipszoid-gömb távolságok térbeli megjelenítése

Csillag jelöli az érintési pontot (5a., 5b. ábra), amely azonos a vetületi kezdőponttal. Elméletben itt az ellipszoid-gömb távolság értéke nulla, melyet természetesen a számítások is alátámasztanak. A pozitív előjel azt a helyzetet jelenti, amikor a gömb az ellipszoid felett helyezkedik el. Mivel az ellipszoid és a gömb hasonló görbületi viszonyokkal rendelkezik, az érintési pont nem szabatosan, pontszerűen képződik le, hanem az 5a., 5b. ábrákon látható módon.

A rácsponthoz számított ellipszoid-gömb távolságok Magyarország területén -9,3 méter és +3,0 méter közötti értékeket vesznek fel. Mivel a két felület hasonló görbületi viszonyokkal rendelkezik, ezek az értékek meglepően tűnhetnek. A görbületi sugarakat vizsgálva elmondható, hogy az érintési pontban ezek nagysága jelentősen eltér egymástól (2. táblázat). Az érintési ponttól 2'-cel nagyobb ellipszoidi földrajzi szélességű pontban (1) a görbületi sugarak értékei is jelentős eltérést mutatnak az érintési pont görbületi sugaraitól, miközben a gömbsugar nagysága nem változik.

	l	érintési p.	kül.
N [m]	6389684,940	6389672,488	12,452
M [m]	6369866,184	6369828,944	37,240

2. táblázat Görbületi sugarak összehasonlítása

Összefoglalás

Az IUGG/1967 ellipszoid és a Gauss-gömb kölcsönös helyzetének ismeretében készített ábrák, valamint a két felület merőleges távolságából szerkesztett ábrák segítségével képet kaptunk a felületek metszetgörbéjének helyzetéről, alakjáról. A távolsági adatok alapján elmondható, hogy bár az ellipszoid és a gömb hasonló görbületi tulajdonságokkal rendelkezik, ill. méreteik nagyságrendben, viszonylag „kis” eltéréssel azonosnak tekinthetők, mégis jelentős különbség tapasztalható közöttük. Az ország déli tájain érik el távolságkülönbségeik pozitív maximumát (kb.3 m); itt a gömb kerekedik az ellipszoid fölé. A keleti és nyugati határvidékeken pedig az ellipszoid válik láthatóvá, mintegy 9 méterrel a gömb felszíne felett.

Köszönetnyilvánítás

Jelen tanulmányban bemutatott kutatások, melyeket TDK munkáim keretében kezdtem el (konzulens: dr. Ádám József egyetemi tanár), és diplomatervem kidolgozásában is folytattam, a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszéken a T043007. sz. OTKA-kutatás („Magyarországi geodéziai vonatkozási rendszerek és vetületi síkkoordináta-rendszerek vizsgálata”); témavezető: dr. Ádám József) keretében folynak. Ez úton is köszönetemet fejezem ki Ádám professzor úr segítő támogatásáért.

IRODALOM

Az Egységes Országos Térképrendszer vetülete. Földmérési Intézet, Budapest, 1972

Ádám József (2000): Magyarországon alkalmazott geodéziai vonatkozási rendszerek vizsgálata. Geodézia és Kartográfia, 52 (2000), 12 (9–15)

Bíró Péter (1996): Felsőgeodézia. Műegyetemi Kiadó, Budapest

Homoródi Lajos (1966): Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest

Joó István (1972): Az új magyarországi közepek sugarú gömb a geodéziai számítási gyakorlat szempontjából. Geodézia és Kartográfia, 24 (1972), 6 (420)

Joó István (1974): Hazánk korszerű geodéziai alapjainak kialakítása. Geodézia és Kartográfia, 26 (1974), 1 (1–5)

Jordan-Eggert-Kneissl (1958): Hundbuch der Vermessungskunde, Band IV. Seite 104–105. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart

Kratochvilla Krisztina (2000): Az EOV alapfelületei térbeli helyzetének vizsgálata. TDK. BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, Budapest

Kratochvilla Krisztina (2002): A felsőrendű háromszögelési alaphálózatunk és az OGPSH közötti transzformáció vizsgálata. Diplomamunka. BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, Budapest

Varga József (1997): Vetülettan. Műegyetemi Kiadó, Budapest

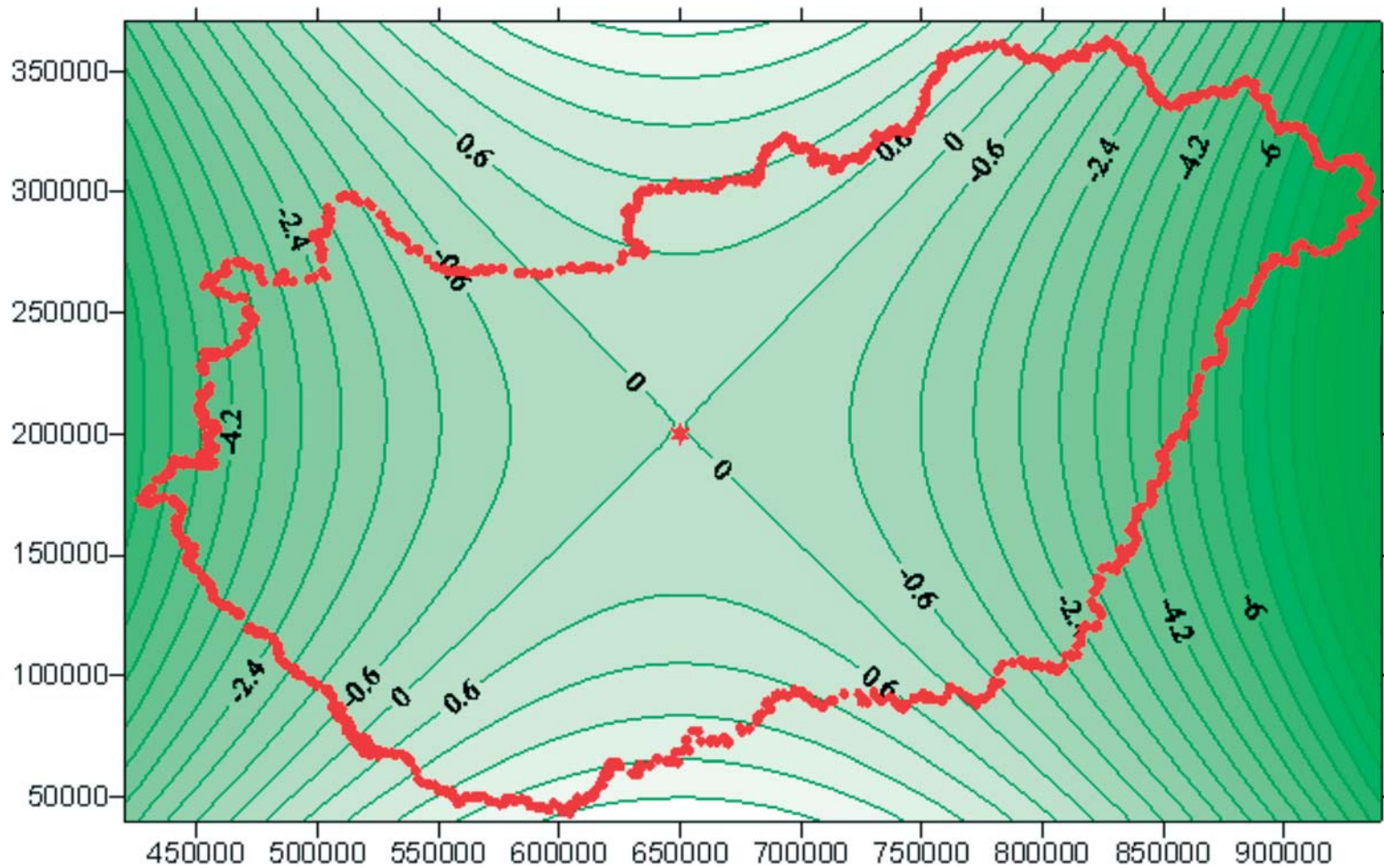
Vetületi szabályzat. MÉM Országos Földügyi és Térképészeti Hivatal, Budapest, 1975

On the Spatial Location of the EOV Reference Surfaces

K. Kratochvilla
Summary

In the Hungarian National Projection (EOV) double projection is used. In this paper we deal with the first step of the projection. The Gaussian sphere's location in the system of the IUGG/1967 reference ellipsoid can be determined by mathematical way. An isolated map and a three-dimensional drawing are made from the perpendicular distance of the ellipsoid and the sphere computed in some test points.

We can find a surprising result: in spite of the fact the two surfaces have the similar proportion of curvature, the difference is considerable. On the South of Hungary the Gaussian sphere is above the ellipsoid with about a maximum of 3 meters, the West and the East side of the country, the body of the ellipsoid can be seen above the sphere's surface about 9 meters.



5.a. ábra Az ellipszoid és simuló gömb közötti távolságok
 Kratochvilla Krisztina „A EOY-alapfelületek térbeli helyzetének vizsgálata” c. cikkében (3–6. old.)