Az Érdi-Krausz vetület javítása

Juhász Péter, az ELTE Phd hallgatója

Érdi-Krausz György 1968-ban megjelent cikkében [2] javasolta oktatási célú, teljes Földet ábrázoló térképekhez az azóta róla elnevezett vetületet (*1. ábra*). Az oktatási cél miatt, *Érdi-Krausz* az alábbi három feltételt szabta a vetületnek: legyen

- területtartó,
- póluspontos,
- képzetes hengervetület.

Az utóbbit a zonalitás szemléltetése végett követelte meg. Még egy kevésbé jól mérhető feltételt is szabott: a földrészek alakja minél kisebb torzulást szenvedjen.

Ezen feltételek figyelembevételével javasolta az azóta nemzetközileg is ismertté vált vetületét [1], mely az Egyenlítő és a 60. szélességi kör között a Mercator-sor egyik tagja, a 60. szélességi kör és a pólus között pedig a Mollweide-vetület. (*Érdi-Krausz* cikkében tulajdonképpen két vetületet ajánl, az egyikben a 60., a másikban a 70. szélességi kör a különböző vetületű területek határa. Véleményem szerint az első lényegesen jobb választás, ezért a továbbiakban csak ezzel foglalkozom.)

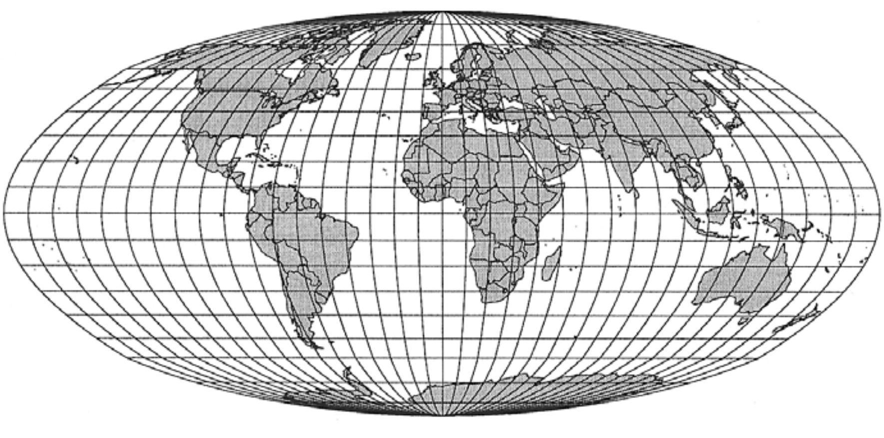
A vetület kedvező torzulási viszonyainak és esztétikai értékeinek megfelelően elterjedt a magyar atlaszok Föld-ábrázolásában.

1. Miért kell javítani?

Ahogy azt *Érdi-Krausz* is említi cikkében, nem könnyű feladat az idézett feltételeknek megfelelni. Így a javasolt vetületnek vannak hátrányai, melyek egyikére már *Hazay* is felhívta a figyelmet [4].

1.1. A területtartás

Az oktatás szempontjából nagyon fontos, hogy a vetület területtartó legyen. Ezzel szemben az Érdi-Krausz-vetület csak „kvázi-területtartó", hiszen az alkalmazott Mercator-sorbéli vetületnek és a Mollweide-vetületnek különböző a méretaránya. Ez az arány 0,841, vagyis a 60. szélességi körön túli területek $0{,}8412^2=0{,}7077$-szeres csökkenést szenvednek az Egyenlítő környéki területekhez képest. (Ezért az atlaszokban mindkét területre külön-külön feltüntetik az aránymértéket.) Megítélésem szerint ez az oktatási térképeken megtévesztőleg hat.



1. ábra. Az eredeti Érdi-Krausz-vetület

1.2. A meridiánok képei

A vetületnek az is hátrányos tulajdonsága, hogy az illesztési paralelkör mentén a meridiánok képei kissé megtörnek, ahogy az az *1. ábrán* is érzékelhető. Ez egyrészt esztétikai szempontból kifogásolható, és ezzel ismét az iskolai alkalmazhatóságot kérdőjelezi meg, másrészt emiatt a torzulási mérőszámokat (szög- és hossztorzulást) a meridiánok mentén tekintve, azok a 60. szélességnél szakadást szenvednek. (Ezt palástolandó előfordul, hogy a meridiánok képeit „kézzel" egy kicsit kisimítják.)

A következőkben ezen problémák orvoslására teszek javaslatokat.

2. Javítási lehetőségek

A javítás során, az előzőekben említettek miatt, csak azokkal a vetületekkel foglalkozom, amelyeknek egységes méretarányuk van és területtartóak. *Érdi-Krausz* cikkének szellemében olyan egységes méretarányú, területtartó, összetett vetület létrehozására törekszem, melynek egyik része Mercator-sorbéli vetület, a másik pedig a Mollweide-vetület.

2.1. Alapok

2.1.1. A Mollweide-vetület

A Mollweide-vetület vetületi egyenletei egységsugarú gömbre vonatkoztatva:
ahol φ a földrajzi szélesség, a λ földrajzi hosszú-

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{Mo}} &= \lambda\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\psi \\ y_{\mathrm{Mo}} &= \sqrt{2}\sin\psi \\ \pi\sin\varphi &= 2\psi+\sin 2\psi, \end{aligned}$$

ság, ψ pedig az ún. módosított szélesség, amit a harmadik egyenlet határoz meg.

2.1.2. A Mercator-sor

A Mercator-sor vetületeit a közismert Mercator-Sanson képzetes hengervetületből származtatjuk. A Mercator-sor egy kétparaméteres vetülethalmaz, melyet a Mercator-Sanson-vetületből kapunk Wagner-transzformáció segítségével [7]. A vetülethalmazt kétféleképpen szokás paraméterezni. Az egyik lehetőség, hogy a Wagner-transzformációból ismert m-mel és n-nel paraméterezünk. Ekkor a vetületi egyenletek:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{Me}} &= \lambda\sqrt{\frac{n}{m}}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi} \\ y_{\mathrm{Me}} &= \frac{1}{\sqrt{mn}}\arcsin(m\sin\varphi) \end{aligned}$$

A Mercator-sor esetében van egy másik, szemléletesebb paraméterezés is. Legyen q a pólusvonal és az Egyenlítő hosszának aránya, d pedig a középmeridián és az Egyenlítő hosszának aránya. Ily módon q és d segítségével is paraméterezhető a Mercator-sor egy eleme. Ekkor:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{1-m^2} \\ d &= \frac{\arcsin m}{n\pi} \end{aligned}$$

A továbbiakban ez utóbbi paraméterezést fogom használni, hiszen egyik fontos célunk, hogy a kontinensek partvonalai minél kevésbé torzuljanak, és ez szorosan összefügg a pólusvonal és a középmeridián Egyenlítőhöz viszonyított hosszával.

2.1.3. Egységes méretarány

Ha van olyan φ szélesség, melyre a megfelelő paralelkör képének hossza megegyezik a Mollweide-vetületben és a Mercator-sorbéli vetületben, akkor e mentén a szélesség mentén a két vetület méretarány-változtatás nélkül összeilleszthető. Azért elég mindössze a paralelkörök hosszának egyezése, mert mindkét vetületben a meridiánok egyenközűen metszik a szélességi köröket. Így ezen a szélességen egy adott λ hosszúsághoz mindkét vetületben azonos x érték tartozik, ennek következtében a meridiánok képei folytonosak lesznek. Nevezzük mostantól a Mercator-sor ilyen tulajdonsággal rendelkező elemeit *illeszthető*nek.

2.1.4. Illeszthető vetületek

Az illeszthető vetületek karakterizálása nem túl könnyű. Könnyen látható, hogy ha

$$n < 0{,}81057m$$

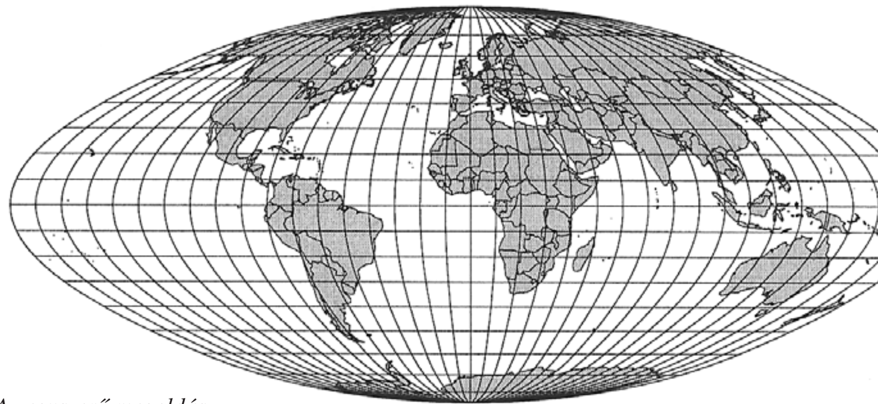
akkor a vetület illeszthető.[1] Megjegyzem, hogy ez a feltétel nem írja le az összes illeszthető vetületet.[2]

2.2. A legegyszerűbb megoldás

A Mollweide-vetület és a Mercator-sor vetületeinek vetületi egyenletei folytonosan differenciálhatóak. Ha elérjük, hogy ez a tulajdonság az

1) Ha $x_{\mathrm{Mo}}(0,\pi) > x_{\mathrm{Me}}(0,\pi)$, akkor az adott Mercator-sorbéli vetület illeszthető, hiszen $0=x_{\mathrm{Mo}}(\pi/2,\pi) < x_{\mathrm{Me}}(\pi/2,\pi)$, és így a Weierstrass-tétel következményeként van olyan h, amire $x_{\mathrm{Mo}}(h,\pi) = x_{\mathrm{Me}}(h,\pi)$, vagyis e mentén a szélesség mentén a két vetület illeszthető. Kiszámítható, hogy $x_{\mathrm{Mo}}(0,\pi)=2{,}82843$, illetve $x_{\mathrm{Me}}(0,\pi) = \sqrt{n/m}\,\pi$. Ebből adódik, hogy $n < 2{,}82843^2/\pi^2\, m = 0{,}81057m$ esetén a vetület illeszthető.

2) Lehet ugyanis, hogy az Egyenlítő hossza is és a pólusvonal hossza is (ami a Mollweide-vetületben 0) nagyobb a Mercator-sorbéli vetületben, de mégis van olyan szélesség, amelynél a szélességi körök vetületbeli hossza megegyezik, vagyis a két vetület illeszthető.



2. ábra Az egyszerű megoldás

összeillesztésnél is teljesüljön, akkor ennek következményeként a meridiánok képei nem fognak megtörni az illesztésnél (ez az egyik szépséghibája az eredeti vetületnek), és a torzulási merőszámok értékei is folytonos függvényei lesznek a helynek. (Ez utóbbi tulajdonság azért teljesül, mert a torzulási merőszámok értékei csak a vetületi egyenletektől, illetve azoknak elsőrendű parciális deriváltjaitól függnek.)

Jelöljük a *(q,d)*-paraméterű Mercator-vetület vetületi egyenleteit $x_{Me_{q,d}}, y_{Me_{q,d}}$-vel. *Érdi-Krausz* vetületének analógiájára keressük azt a vetületet, amiben a két alkotó vetület a 60. szélességi körnél illeszkedik. Vagyis keressük azokat a *(q,d)* párokat, amelyekhez tartozó vetületekre igaz a következő egyenlőség:

$$x_{Mo}(60^\circ,\pi) = x_{Me_{q,d}}(60^\circ,\pi).$$

Ezt az egyenletet numerikus módszerekkel megoldva, a megoldást Taylor-sorba fejtve kapjuk, hogy

$$d(q)=0{,}34474 + 0{,}51282q^2 + 0{,}70615q^4 + 1{,}78502q^6 + 1{,}94246q^8 \quad 0{,}80099q^{10}.$$

A numerikus megoldás úgy történt, hogy a Mathematica szoftver segítségével a $q \in (0{,}3;0{,}9)$ tartományban rögzített q-kra gyököket kerestem, majd pedig erre az adatsorra a szoftver segítségével polinomot illesztettem. Vagyis az előző egyenlet csak ebben a tartományban ad jó értékeket, de ez megfelel a céloknak, hiszen a kívánalmaknak megfelelő q (a pólusvonal és az Egyenlítő aránya) ebben a tartományban keresendő. Ezzel tehát a potenciális vetületek egy egyparaméteres vetületsereget alkotnak. Ezek közül az felel meg a mi céljainknak, amire még az is teljesül, hogy

$$\partial_\varphi x_{Mo}(60^\circ,\pi) = \partial_\varphi x_{Me_{q,d}}(60^\circ,\pi).$$

Ezeket a feltételeket egyetlen Mercator-sorbéli vetület elégíti ki, mégpedig a

$$q = 0{,}35256363 \text{ és } d = 0{,}41634149$$

paraméterű. Ezt a vetületet a 60. szélességi köröknél a Mollweide-vetülettel összeillesztve kapjuk a *2. ábrán* látható vetületet.

Ez a vetület tehát viszonylag egyszerű úton kiküszöböli azokat a kifogásokat, amiket az eredeti vetülettel szemben támasztani lehetett, és megfelel az eredeti kívánalmaknak is.

2.3. Kívánhatunk többet is

Ha a vetülettől még kívánni akarunk valamit, az legkézenfekvőbb módon az lehet, hogy a torzultsága minél kisebb legyen. Mivel a vetületek területtartóak, ezért figyelmünket a szögek torzulásának minimalizálására érdemes fordítanunk. Először definiáljunk egy mérőszámot, amely azt próbálja mérni, hogy egy adott pontban mennyire torzulnak a szögek. Legyen ez a jól ismert Airy-Kavrajszkij-féle mérőszámból [1] adódó, szögtorzulást jellemző tag:

$$\varepsilon_{AK}^2 = \ln^2 \frac{a}{b}$$

ahol a a maximális, b pedig a minimális hossztorzulás az adottpontban. Több hasonló mérőszám is szóba jöhetett volna, de [3] alapján ez bizonyul a legmegfelelőbbnek. Ezt a mérőszámot még ki kell terjesztenünk, ha azt szeretnénk, hogy az egész vetület torzulási viszonyait tükrözze. Először tisztáznunk kell, hogy a földfelszín mely T területe fontos a vetület vizsgálata szempontjából. Ezek után az egyik módszer egyszerűen veszi ε^2_{AK} maximális értékét a vizsgált területen. A másik pedig átlagolja ezen értékeket a vizsgált területen, azaz ahol $\mu(T)$ a vizsgált terület felszíne. Ez utóbbi a

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{\mu(T)} \int_T \varepsilon_{AK}^2 \, \mathrm{d}T,$$

jelen esetben sokkal célszerűbb, így itt csak ezt vizsgálom.

Tisztázzuk először, hogy mi legyen a T terület. A szokásos eljárást nem érdemes alkalmazni, hiszen akkor a ±85. szélességi körök között kellene vizsgálnunk a vetületet.

Ez most nem célravezető, mivel csak az illesztő paralelkörök közötti területen fontos a torzultság mértéke, hiszen azon kívül mindig ugyanazt a vetületet fogjuk alkalmazni, nevezetesen a Mollweide-vetületet. Vagyis a 60. és a 85. szélességi kör között mindig ugyanazt a torzultsági értéket kapnánk, ami a végeredményben csak egy konstansként jelentkezne.

2.3.1. Vetületek keverése

A következőkben szeretnék választani a Mercator-sorból egy megfelelő vetületet, amelyet a Mollweide-vetülettel kombinálva az eredeti kívánalmaknak megfelelő vetületet kapunk. A kombinálás a következőket jelenti: a végleges vetületet (ugyanúgy mint az Érdi-Krausz-vetület esetében) az Egyenlítő és a 60. szélességi körök között a megfelelő Mercator-sorbéli vetület, a 70. szélességi körök és a sarkok között a Mollweide-vetület alkotja, a 60. és a 70. szélességek között pedig egy átmeneti zóna van, amelyben „keveredik” az előző két vetület. Így viszonylag kis területen befolyásoljuk az eredeti vetületeket, de van elég helye a szép, folytonos átmenetnek. Vagyis még azzal vagyunk adósak, hogy hogyan néznek ki a vetületi egyenletek az 60. és a 70. szélességi kör között.

Az átmenetet a [5]-ben leírtak alapján, többféle keverőfüggvénnyel is meg lehet oldani. A $p(\varphi)$ keverőfüggvényre most azok a minimális feltételek, hogy $\varphi \leq 60^\circ$ esetén $p(\varphi) = 0$, és j ≥ 70º esetén $p(\varphi) = 1$. (Ugyanis ezek a feltételek biztosítják, hogy az adott területeken *csak* a Mercator-sorbéli, illetve a Mollweide-vetület alkossa a kapott vetületet.) Ezeket feltéve, a legegyszerűbb p az, amelyik 60º és 70º között lineáris. Ez azért nem felel meg a céljainknak, mert ekkor p nem differenciálható $\varphi = 60^\circ$ és $\varphi = 70^\circ$ esetén. Ennek pedig az lesz a következménye, hogy a torzulások értékei nem lesznek a helynek folytonos függvényei a vetületben. Azért, hogy ez a probléma ne merüljön fel, érdemes még a következőket is feltenni a p-ről:

$$p'(60^\circ) = p'(70^\circ) = 0.$$

Ekkor a keverőfüggvény is mindenhol differenciálható lesz, így a torzulások is folytonossá válnak.

Két fontos kérdés maradt hátra. Az egyik, hogy melyik vetületet válasszuk a Mercator-sorból; a második pedig, hogy a választott vetületet milyen keverőfüggvény segítségével keverjük az átmeneti zónában. Mindkét kérdés tisztázásakor figyelembe kell vennünk az eredetileg támasztott követelményeket. Ezek közül az, hogy a kapott vetület hengervetület legyen, automatikusan teljesül. Azt a feltételt, hogy a vetület területtartó legyen, csak „majdnem” teljesítjük, azaz az átmeneti zónán kívül a vetület természetesen területtartó lesz, azon belül pedig a területtorzulási modulus értéke csak nagyon kevéssé fog eltérni az 1-től. A harmadik feltétel, ami – mint kiderült – a leginkább befolyásolja a jó választást az, hogy a kontinensek alakja a lehető legkevésbé torzuljon.

2.3.2. A legkisebb torzultságú vetület a Mercator-sorban

Válasszuk ki a Mercator-sorból azt a vetületet, aminek az Airy-Kavrajszkij-féle torzultsági mérőszáma a legkisebb.

Ismételten a Mathematica szoftver segítségével, numerikus eljárásokkal megállapítható, hogy a Mercator-sor legkedvezőbb vetülete az, amelyben $q = 0,878073$, $d = 0,473463$.

Ekkor

$m = 0,478527$, $n = 0,335462$ és $E^2_{AK} = 0,162282$.

Ebben a vetületben a 60. szélességi kör képe lényegesen eltér a Mollweide-vetület megfelelő értékétől. Ez a vetület ugyanis nem illeszthető. Így az átmeneti zónában való keverés során komoly különbségeket kell kiegyenlíteni, ami erősen torzítja a kontinensek alakját. A területtorzulási modulus értéke megfelelő keverőfüggvény esetén kedvező marad, de a kontinensek alakjának erős torzulása miatt ez a vetület nem teljesíti a kívánt feltételeket.

2.3.3. A legkedvezőbb illeszthető vetület

A legkedvezőbb Mercator-sorbéli vetülettel az volt a probléma, hogy nem volt illeszthető. Kézenfekvő az ötlet, hogy vegyük az illeszthető vetületek közül azt, aminek a legkisebb az Airy-Kavrajszkij féle torzultsági mérőszáma. Ismét numerikus eljárások segítségével megállapítható, hogy ez a $q = 0,645435$ és $d = 0,600324$ paramétereknél adódik. Ebben az esetben $m = 0,763815$ és $n = 0,460878$. Ezzel a választással már más probléma van, mely nem egzakt kifogás. Ebben a vetületben ugyanis a d paraméter (vagyis a középmeridián Egyenlítőhöz viszonyított hossza) túl nagy, így a kontinensek alakja megítélésem szerint túlságosan elnyújtott. Viszont ha ettől eltekintünk, akkor megfelelő keverőfüggvénnyel a területtorzulási modulus értékét nagyon közel lehet tartani 1-hez.

2.3.4. Az Érdi-Krausz-vetülethez „legközelebbi" illeszthető vetület

Az előző vetület hibáját többféle módon is ki lehetne kijavítani. Az egyik kézenfekvő lehetőség, hogy vegyük azt az illeszthető vetületet, amiben d értéke megegyezik az Érdi-Krausz-vetületben használt értékkel. Ezt a vetületet azért nem érdemes választani, mert ekkor q értéke nagyon kicsi lesz, és ráadásul az Airy-Kavrajszkij féle torzultsági érték is jelentősen megnő.

Ezeket figyelembe véve, azt javaslom, hogy vegyük azt az illeszthető vetületet, ami a „legközelebb van" az Érdi-Krausz-vetülethez. A távolságot a (*q-d*)-síkon értem (ld. *5. ábra*). Ez azt jelenti, hogy azt a vetületet válasszuk, ami egyrészt illeszthető, másrészt pedig amire a $\sqrt{(q-q_E)^2+(d\ d_E)^2}$ érték minimális. (q_E illetve d_E az Érdi-Krausz-vetületben használt Mercator-sorbéli vetület megfelelő értékeit jelenti.)

Numerikus eljárásokkal ismét kiszámítható, hogy ekkor a vetület paraméterei q = 0,525087 és d = 0,512351. Ennek az m = 0,851048 és n = 0,632444 paraméterek a megfelelői. Ennél a vetületnél E^2_{AK} = 0,384813. Ennél a vetületnél tehát nem probléma az illeszthetőség, és a jellemző vonalak (pólusvonal, középmeridián) hosszai is megfelelőek ahhoz, hogy a kontinensek alakja kevéssé torzuljon.

Már csak a keverőfüggvény megadása van hátra, ami az átmeneti zónában definiálja a vetületet. Az egyik legegyszerűbb módon úgy tudunk megfelelni a 2.3.1. fejezetben említett követelményeknek, ha első- és másodfokú függvényekből állítjuk össze a keverőfüggvényt. Az átmeneti zóna középső részén lévő elsőfokú függvény biztosítja az egyenletes átmenetet, a két szélső részén lévő másodfokú függvény pedig a differenciálhatóságot. Olyan módon kell tehát a függvényt megválasztani, hogy

$p(60^o) = 0$, $p(70^o) = 1$ és $p'(60^o) = p'(70^o) = 0$.

Ennek a feltételnek eleget tesz az alábbi keverőfüggvény:

$$p(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \varphi \le 60^o \\ \frac{8}{3}(\frac{\varphi - 60^o}{10^o})^2 & \text{ha } 60^o < \varphi \le 62,5^o \\ \frac{4}{3}\frac{\varphi - 60^o}{10^o} - \frac{1}{6} & \text{ha } 62,5^o < \varphi \le 67,5^o \\ 1 - \frac{8}{3}(\frac{\varphi - 60^o}{10^o} - 1)^2 & \text{ha } 67,5^o < \varphi \le 70^o \\ 1 & \text{ha } \varphi > 70^o \end{cases}$$

Lássuk a vetület egyenleteit:

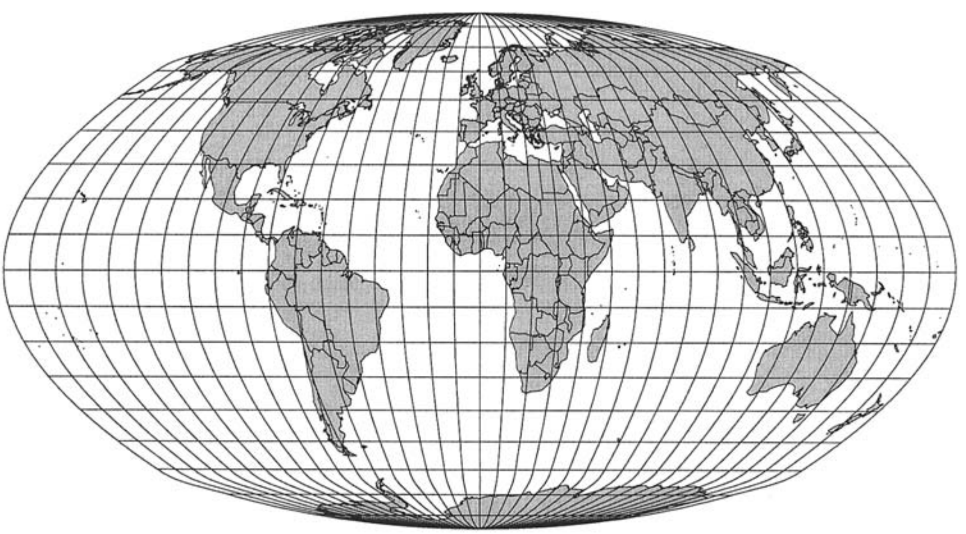
$$\begin{aligned} x(\varphi,\lambda) &= (1-p(\varphi))\,x_{\mathrm{Me}_{q,d}} + p(\varphi)x_{\mathrm{Mo}} \\ y(\varphi,\lambda) &= (1-p(\varphi))\,y_{\mathrm{Me}_{q,d}} + p(\varphi)y_{\mathrm{Mo}}, \end{aligned}$$

ahol q = 0,525087, d = 0,512351, $p(\varphi)$ pedig az előbbiekben definiált függvény.

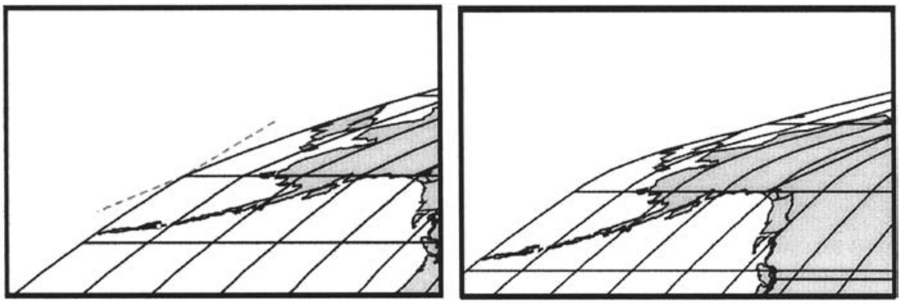
Ha ezt a vetületet tekintjük (*3. ábra*), akkor a területtorzulási modulus (τ) értéke az átmeneti zónán kívül természetesen 1, az átmeneti zónában pedig igaz az, hogy

$$|\tau\text{-}1| < 0,037.$$

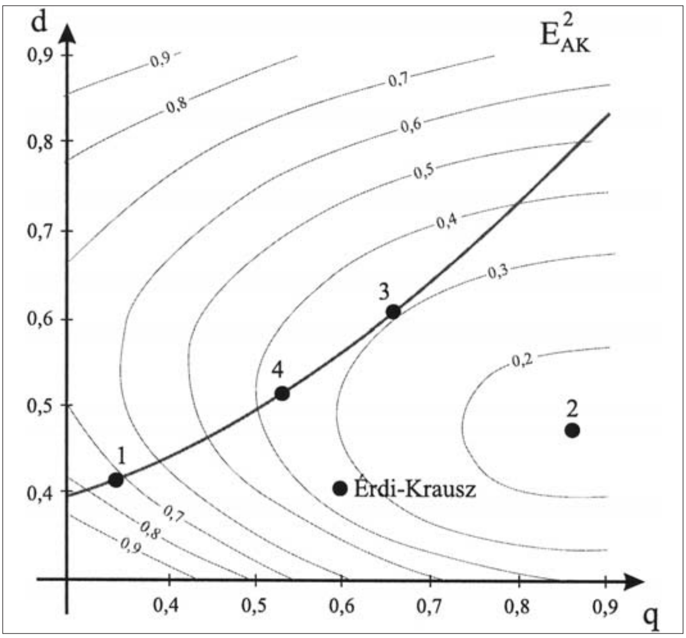
Vagyis a kapott vetület lényegében területtartó. A 4. ábrán láthatjuk, hogy míg az Érdi-Krausz-vetületben az illesztésnél a meridiánok megtörnek



3. ábra. Az Érdi-Krausz-vetület javasolt módosított változata



4. ábra.
A 60. szélességi kör környéke az Érdi-Krausz-, illetve a szerző által javasolt vetület esetében



5. ábra. E^2_{AK} *értékei, és az említett vetületek elhelyezkedése a* q–d-*síkon*

(a szaggatott vonalak jelzik a határoló meridián pontbeli érintőjét a Mollweide-vetületben, illetve a Mercator-sorbéli vetületben), addig ennél a vetületnél a meridiánok képei folytonosan differenciálhatóak.

Az *5. ábrán* áttekinthetjük, hogy *q* és *d* függvényében mekkora a (q,d)-paraméterű Mercator-sorbéli vetület E^2_{AK} értéke, és azt is, hogy a cikkben említett vetületek hol helyezkednek el a q–d-síkon. A fekete görbe mutatja az illeszthető vetületek seregét, az 1-gyel jelölt pont jelzi a 2.2. fejezetben konstruált vetületet, a 2-vel jelölt pont a legkedvezőbb torzultságú vetületet (2.3.2. fejezet), a 3-mal jelölt pont az illeszthetők közül a legkedvezőbb torzultságút (2.3.3. fejezet), a 4-gyel jelölt pedig az Érdi-Krausz-vetülethez „legközelebbi" vetületet (2.3.4. fejezet).

További lehetőségek

Érdi-Krausz eredeti feltétele az volt, hogy a vetülete legyen területtartó. Az általam javasolt vetületek közül az utóbbi csak „majdnem" az, hiszen, ha kismértékben is, de a területtorzulási modulus értéke ebben a vetületben eltér 1-től. Ennek ellenére az így kapott vetület alkalmas ugyanazokra a célokra, amelyekre *Érdi-Krausz* az eredeti vetületet megalkotta.

A maximális elvárás az lehetne, hogy megtaláljuk az(oka)t a függvény(eke)t, amely(ek) úgy keveri(k) össze az átmeneti zónában a vetületeket, hogy közben a területtartás tulajdonsága ebben az övezetben is maradéktalanul teljesül. Ez egy nehéz matematikai probléma, melynek megoldásához vélhetően komoly, parciális differenciálegyenleteknél alkalmazott apparátusra van szükség. A fő nehézséget pedig az okozza, hogy a Mollweide-vetület egyenletei csak implicit alakban állnak a rendelkezésünkre.

HIVATKOZÁSOK

[1] *Lev M. Bugayevskiy–John P. Snyder*: Map Projections: A Reference Manual, Taylor & Francis, 1995

[2] *Érdi-Krausz György*: Combined equal area projection for world maps, Hungarian Cartographic Studies, Földmérési Intézet, Budapest, 1968

[3] *Györffy János:* Anmerkung zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen, Kartographische Nachrichten, Bonn 1990. Nr. 4

[4] *Hazay István:* A vetületek szerepe a térképészetben, Geodézia és Kartográfia, Budapest 1988/6.

[5] *Juhász Péter:* Optimal projections by means of convex linear combination, Studia Cartologica 2002., pp. 43–54, ELTE Eötvös Kiadó

[6] *Karl Siemon:* Flächenproportionales Umbeziffern der Punkte in Kartenentwürfen, Mitteilung des Reichamtes für Landesaufnahme, Berlin 1937. Nr. 2 und 1938. Nr. 1

[7] *Karl-Heinz Wagner:* Die unechten Zylinderprojektionen, Archiv der deutschen Seewarte 51. Bd. Nr. 4, Hamburg 1932

Repairing of the Érdi-Krausz projection

P. Juhász

Summary

The classical Érdi-Krausz projection has a disadvantageous property: The images of meridians along the 60th latitude are broken. By means of convex linear combinations and a suitably chosen *transition zone* this problem can be corrected, which is the subject of this article.

Lokális ionoszféra-modellek Magyarország területére

Takács Bence tudományos segédmunkatárs
MTA-BME Fizikai Geodézia és Geodinamikai Kutatócsoport

Bevezetés

A korlátozott hozzáférés (*Selective Availability, SA*) felfüggesztése után új fejezet kezdődött a GPS technikában. A rendszer üzemeltetői szerint, 95 százalékos valószínűségi szinten a vízszintes helyzet meghatározási pontossága 13 m, a magassági helyzeté 22 m (*GPS SPS Performance Standard*). A gyakorlati tapasztalatok lényegesen kedvezőbbek (*Takács*, 2002). A pontosság további fokozására két lehetőség kínálkozik: (1) abszolút helymeghatározás helyett relatív helymeghatározás; vagy (2) a szabályos hibák pontosabb figyelembevétele finomabb modellek alapján. A második módszer a szakirodalomban szabatos abszolút helymeghatározás (*precise single point positioning*) néven terjedt el. Tulajdonképpen ebben az esetben sem beszélhetünk szigorú értelemben vett abszolút helymeghatározásról, hiszen a szabályos hibák modellezése permanens GPS állomások méréseinek feldolgozása útján valósul meg.

Az ionoszféra hatását a legtöbb alkalmazás a Klobuchar-modell (*Joó*, 2000) alapján veszi figyelembe, a műholdak által sugárzott paraméterek alapján. Ismert, hogy ezzel a módszerrel a hatásnak mindössze 50–60 százaléka vehető figyelembe, a fennmaradó rész akár több méteres hibát is okozhat az abszolút helymeghatározásban. A műholdak által sugárzott Klobuchar-modell paramétereiből levezethető ionoszféra-térképek és a berni feldolgozó központban (permanens GPS állomások méréseinek feldolgozása alapján) meghatározott globális ionoszféra-térképek összehasonlítása a központ web oldalán (www.aiub.unibe.ch/ionosphere.html) található meg.

Az ionoszféra jelkésleltető hatását két frekvencián végzett mérésekből a mérések lineáris kombinációjával kiküszöbölhetjük. A módszer két hátrányát említjük: (1) a kétfrekvenciás vevők lényegesen drágábbak, mint az egyfrekvenciás vevők, a felhasználók jelentős része egyfrekvenciás vevőkkel rendelkezik; (2) az L2 frekvencián végzett kódméréseket jelentős mérési zaj terheli, kedvezőtlen körülmények közt az L2 frekvencián számos mérés kimarad, emiatt a helymeghatározásba bevonható műholdak száma jelentősen csökkenhet.

A cikkben bemutatjuk, hogyan lehet az egy frekvencián végzett mérések feldolgozásakor az ionoszféra hatását a Klobuchar-modellnél lényegesen pontosabb lokális ionoszféra-modellekkel figyelembe venni. A lokális ionoszféra-modellek módszere a szakirodalomban több helyen is megtalálható, pl. (*Komjáthy*, 1997), (*Schaer,* 1999), (*Liao*, 2000). A lokális ionoszféra-modellek együtthatóit permanens GPS állomások (természetesen két frekvencián végzett) méréseinek feldolgozásával vezethetjük le. A lokális ionoszféra-modelleket használhatjuk az abszolút mérések