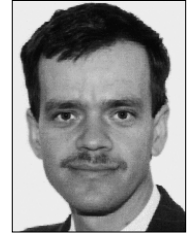


Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk



Dr. Völgyesi Lajos egyetemi docens,
dr. Tóth Gyula egyetemi docens
(BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék)

Történeti áttekintés

Eötvös Loránd 1886-ban kezdett gravitációs kutatásokkal foglalkozni. 1890-ben végezte első gravitációs vizsgálatait a görbületi variométerrel (Coulomb-ingával). Ezen mérések során támadt a zseniális ötlete, hogy az ingarúd két végén lévő tömeg közül az egyiket az 1. ábrán szemléltetett módon, lelógó szállal alacsonyabb szintre helyezze. Ezzel a megoldással a potenciálfelületek alakját (gömbalaktól való eltérését) jellemző $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és W_{xy} görbületi gradienseken kívül a szintfelületek nem párhuzamosságára jellemző W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiensek meghatározására is lehetőség nyílt. Ez az Eötvös-inga alapössze-

dig az 1. ábrán azonosíthatók). Látható, hogy $h=0$ esetén (1) a Coulomb-inga alapösszefüggését adja.

Eötvös 1890-ben megalkotott torziós ingája egészen 1969-ig számos fejlesztésen ment keresztül, és ez idő alatt Magyarországon mintegy 300 db műszer készült. A torziós ingával az első nagyobb területre kiterjedő terepi méréseket 1901 és 1903 között a téli Balaton sík jégfelületén Eötvös Loránd és munkatársai végezték. Ezt követően az 1967-ig terjedő időszakban a Magyar–Amerikai Olaj-ipari Rt. (MAORT), az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) és az Országos Kőolaj és Gázipari Tröszt (OKGT) összesen mintegy 60000 ingamérést végzett a sík és az enyhén dombvidéki

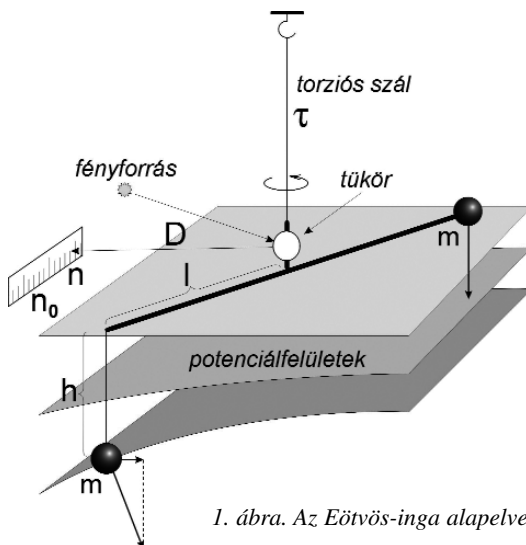
$$n - n_0 = \frac{DK}{\tau} (W_{\Delta} \sin 2\alpha + 2W_{xy} \cos 2\alpha) + \frac{2Dhlm}{\tau} (W_{zy} \cos \alpha - W_{zx} \sin \alpha) \quad (1)$$

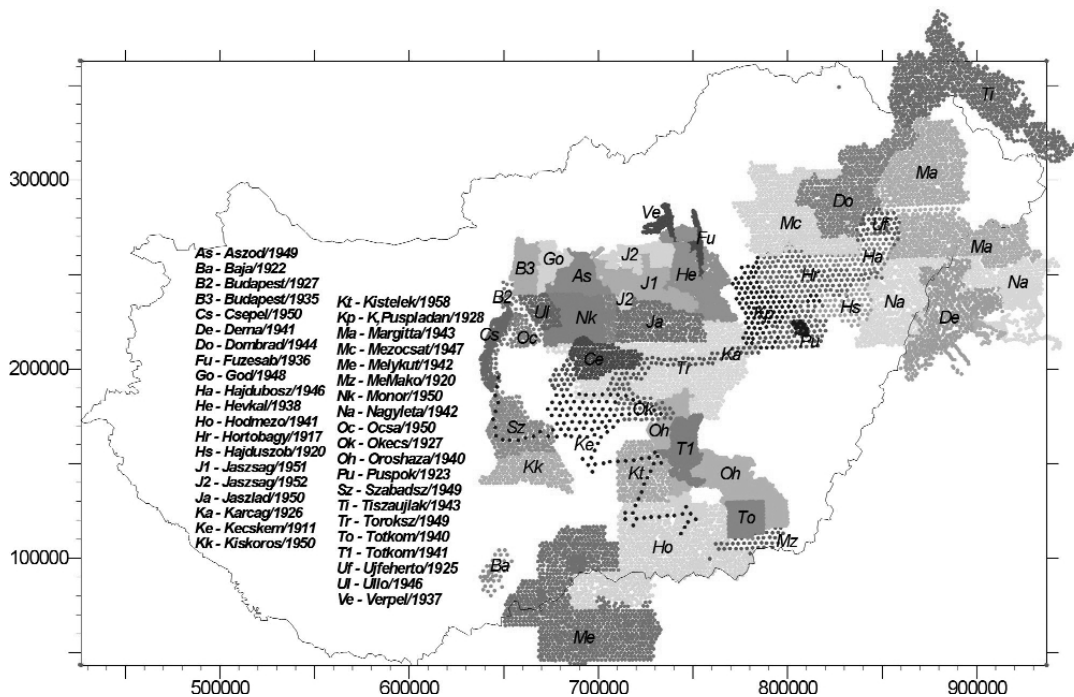
függéséből is kiolvasható (α az ingarúd azimutja, n_0 a torziómentes állapot, K az inga mechanikai tehetetlenségi nyomatéka – a további jelölések pe-

területeken (Szabó 1999). Ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld egyik legjobban felmért területe lett.

A mérési eredmények hozzáférhetősége

Mivel a méréseket elsősorban ásványi nyersanyagok kutatása céljából végezték, ezért nagy általánosságban csak a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradienseket dolgozták fel, a geodézia szempontjából fontosabb W_{Δ} és W_{xy} görbületi gradiensek feldolgozatlanul maradtak. Sajnos ma már a mérési adatok egy része elveszett, viszont a jelentősebb részük a korábbi mérési jegyzőkönyvek alapján hozzáférhető. Jelenleg komoly erőfeszítések folynak a még meglévő adatok megmentésére, az egykori – esetenként alig olvasható – mérési jegyzőkönyvek adatait az ELGI munkatársai számítógépes adatbázisba rendezik. 2001 decemberéig 17578 Eötvös-inga mérési pont adatait sikerült számítógépen rögzíteni. Az eddig rögzített pontok területi eloszlása a 2. ábrán látható.





2. ábra. Számítógépes adatbázisban szereplő Eötvös-
ingamérési pontok eloszlása 2001-ben

Az adatbázisban az egyes pontokra vonatkozóan az alábbi adatok szerepelnek: a mérési állomás száma, a mérési év, az állomás ϕ és λ földrajzi koordinátája, a W_{zx} , W_{zy} , W_{Δ} , $2W_{xy}$ gradiensek, valamint a hozzájuk tartozó topografikus hatás.

A mérési eredmények geodéziai hasznosítása

Elsőként *Eötvös Loránd* mutatott rá a görbületi gradiensek geodéziai felhasználhatóságára. Alapvető összefüggést vezetett le a görbületi gradiensek és a függővonal-elhajlás összetevők két pont közötti megváltozására, és ezzel kapcsolatban próbaszámításokat végzett az Arad környéki teszterületen. Ebben a munkájában *Eötvös Loránd* jelentős segítséget kapott *Oltay Károlytól*, a BME Geodézia Tanszékének korábbi professzorától. *Oltay* egyrészt vizsgálatokat végzett a torziós-ingamérések pontosságára (*Oltay* 1928), másrészt geodéziai és asztronómiai méréseket és számításokat végzett a görbületi gradiensek felhasználásával meghatározott függővonal-elhajlás értékek pontosságára vonatkozóan (*Oltay* 1927). Az Arad környéki ellenőrző pontokon az asztronómiai mérések és a görbületi gradiensek alapján számított

értékek különbségei a $-0,7''$ és $+0,8''$ intervallumon belül adódtak.

Később *Eötvös* függővonal-elhajlás interpolációs módszerét *Renner János* egyszerűsített formában továbbfejlesztette (*Renner* 1952, 1956, 1957), a kísérleti számítások eredményeinek biztonságos ellenőrzésére azonban nem volt lehetősége.

Magyarországon kívül az USA-ban és Németországban is folytatnak kutatásokat az ingamérések geodéziai hasznosítására, függővonal-elhajlás interpoláció és geoidmeghatározás céljára (*Badekas*, *Mueller* 1967; *Heinecke* 1978; *Hein* 1981).

A modern számítástechnikai eszközök megjelenése új távlatokat nyitott a torziósingamérések geodéziai hasznosítása terén. Tanszékünkön 1972-től intenzív kutatások indultak először a nagyobb területekre kiterjedő függővonal-elhajlás interpolációval kapcsolatosan (*Völgyesi* 1976, 1977 a, b, c; 1980, 1993, 1995), majd a geoid finomszerkezetének meghatározására (*Völgyesi* 1998, 2001a, b; *Tóth*, *Völgyesi* 2002).

Függővonal-elhajlás interpoláció

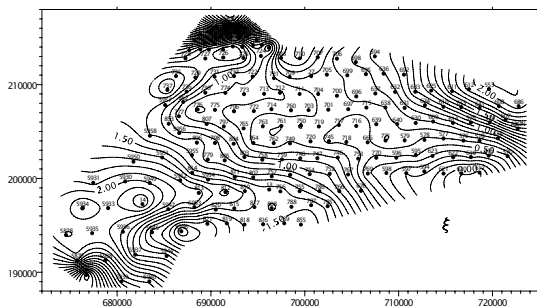
A ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők két tetszőleges i és k pont közötti $\Delta\xi_{ik}$ és $\Delta\eta_{ik}$ megváltozása, valamint az Eötvös-ingával mérhető $W_{\Delta} = W_{yy}$ és $2W_{xy}$ görbületi gradiensek között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\Delta \xi_{ik} \sin \alpha_{ki} - \Delta \eta_{ik} \cos \alpha_{ki} =$$

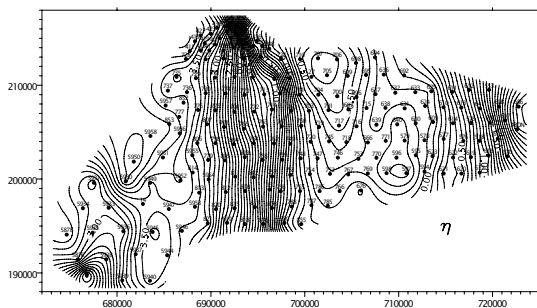
$$\frac{n_{ik}}{4g} \left\{ \left[(W_{\Delta} - U_{\Delta})_i + (W_{\Delta} - U_{\Delta})_k \right] \sin 2\alpha_{ki} + \left[(W_{xy} - U_{xy})_i + (W_{xy} - U_{xy})_k \right] 2 \cos 2\alpha_{ki} \right\} \quad (2)$$

ahol $U_{\Delta} = U_{yy} - U_{xx}$, s_{ik} az i és a k pont közötti távolság, g az átlagos nehézségi gyorsulás értéke a pontok között, U_{xx} , U_{yy} és az U_{xy} a görbületi gradiensek értéke a normál nehézségi erőterben, α_{ki} pedig az i és a k pont közötti azimut (Völgyesi 1993, 1995). A számítás alapvetően vonal menti integrálás, amely a gyakorlatban a trapéz integrálközelítő képlettel abban az esetben oldható meg, ha az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek két szomszédos pont közötti megváltozása a (2)-ben lineárisnak tekinthető (Völgyesi 1993).

Tanszékünkön közel húsz éves kutatómunka eredményeképpen kidolgoztuk a nagyobb összefüggő területre alkalmazható és a modern számítástechnika által kínált lehetőségeknek leginkább megfelelő függővonal-elhajlás interpolációs módszert (Völgyesi 1993, 1995). A Cegléd környéki, mintegy 1200 km² kiterjedésű teszt területen elvégzett kísérleti számítások eredményei szerint a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők közel fél szögmásodperces pontossággal számíthatók. A 3. és a 4. ábrán az említett teszt területen számított függővonal-elhajlás összetevők képe látható.



3. ábra. Interpolált ξ értékek



4. ábra. Interpolált η értékek

Lokális geoidformák meghatározása

A P_i és a P_k pont között a geoid-ellipsoid távolság ΔN_{ik} különbsége a (2) felhasználásával számított ξ , η függővonal-elhajlás összetevők ismeretében a csillagászati szintezés módszerét alkalmazva a (3)

$$\Delta N_{ik} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik} \right) s_{ik}$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Kiküszöbölve a hagyományos csillagászati szintezés, négyzetháló sarokpontjaira történő számításának problémáját, közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontok helyét választottuk a geoid számítások céljára. Így a ΔN_{ik} különbségeket nem É-D illetve K-Ny irányban, hanem az Eötvös-inga mérési állomások pontjai között, tetszőleges α azimutban határoztuk meg (Völgyesi 1998, 2001).

A módszer alkalmazhatóságára kísérleti számításokat végeztünk a Szabadszállás–Kiskörös környéki mintegy 800 km² kiterjedésű teszt területen, ahol 249 Eötvös-inga mérési-, és 13 ellenőrzőpont (3 asztrogeodéziai, és 10 asztrogravimetriai pont) állt rendelkezésünkre a számítások ellenőrzése céljából. A számítások pontosságára a következőkben még visszatérünk.

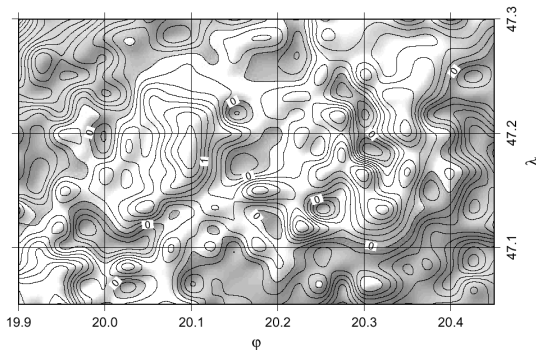
A kollokáció alkalmazása

A kollokáció statisztikai eljárása (Detrekői 1991) lehetővé teszi azt, hogy a nehézségi erőter bármelyik jellemző mennyiségét (például nehézségi rendellenességeket, függővonal-elhajlásokat, a nehézségi térerősség gradienseit, így az Eötvös-inga méréseket) felhasználva előállíthassuk az erőteret jellemző bármelyik mennyiség becslését (predikcióját). A kollokáció alapösszefüggése a következő:

$$N(P) = C^{Ng} (\psi_{P_i}) (C^{gg} (\psi_{i_i}))^{-1} \Delta g_i$$

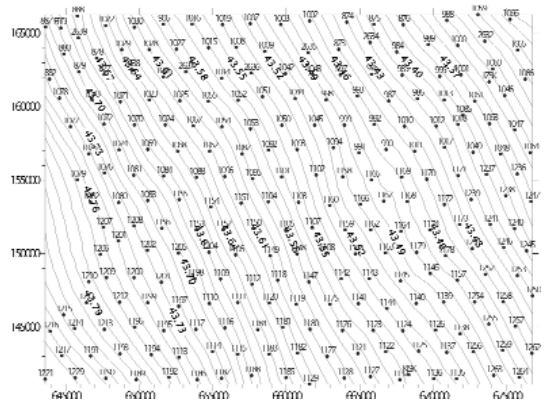
ahol N a kollokációval becsült nehézségi erőter-jellemző, g a mért nehézségi erőter-jellemző, C^{Ng} és C^{gg} pedig a nehézségi erőter fenti jellemzőinek statisztikai leírására szolgáló megfelelő kovarian-

cia függvények, amelyek a mérési adatok alapján modellezhetők. Az Eötvös-inga mérések a megfelelő (W_{xz} , W_{yz}), illetve (W_{xx} - W_{yy} , W_{xy}) kombinációkban felhasználhatók a kovariancia függvények meghatározása után külön-külön és együtt is, függővonal-elhajlások, geoidmagasságok, illetve nehézségi rendellenességek kiszámítására. Az 5. ábrán láthatjuk, hogy a Szolnok környékén kiválasztott 60 km × 40 km-es közel sík területre az Eötvös-inga mérésekből kollokációval előállított nehézségi rendellenességek mennyire térnek el az ELGI gravitációs adatbázisából származó kb. 2×2 km-es rácsra interpolált, mért nehézségi rendellenesség értékektől. Az egyezés kiválóan mondható, hiszen az eltérések szórása mindössze ±0,68 mGal. Ezért ezeket az adatokat legalábbis sík területen, vizsgálataink szerint előnyösen lehet felhasználni a nehézségi erőter meghatározásában.



5. ábra. Az Eötvös-ingával mért adatokból kollokációval számított és a mért nehézségi rendellenességek eltérései mGalban; Szolnok környéki 60 km x 40 km-es területre (TÓTH 2000). Izovonalköz: 0,2 mGal

A kollokációval előállított függővonal-elhajlások és geoidmagasságok összevetése a már említett Szabadszállás–Kiskőrös környéki területen az asztrogeodéziai és gravimetriai ellenőrző pontok értékeivel megmutatta, hogy a geoidmagasságok eltérése általában ± 1–3 cm volt. Kicsit jobb egyezést mutattak a (W_{xx} - W_{yy} , W_{xy}) adatokból számított geoidundulációk, mint a (W_{xz} , W_{yz}) gradiensekből meghatározottak. A 6. ábrán a görbületi gradiensekből kollokációval előállított geoidmagasságok ábrája látható az említett területen. A függővonal-elhajlások eltérései 1" alatt maradtak, kicsit kedvezőbb értékeket adva az η összetevőre (Tóth, Völgyesi 2002).



6. ábra. Kollokációval előállított geoidmagasságok a görbületi gradiensekből

A nehézségi erőter előállítása Eötvös-inga adatokból a felsőgeodézia peremérték-feladatain keresztül

A felsőgeodézia úgynevezett peremérték-feladatain keresztül lehetőség nyílik arra, hogy a földfelszínen mint peremfelületen mért erőter adatok segítségével meghatározhassuk a Földünk teljes külső terében az erőteret jellemző potenciál-függvényt (geoidfelületet), illetve azzal függvénykapcsolatban levő tetszőleges más erőterjellemzőt (például a nehézségi rendellenességek értékét). Ennek egyik jól ismert példája a Stokes-integrál, amely a földfelszíni nehézségi rendellenességek és egy súlyfüggvény (a Stokes-függvény) ismeretében megadja a geoidundulációk eloszlását a Föld felszínén vagy azon kívül. A Stokes-integrálhoz hasonló összefüggések vezethetők le az Eötvös-inga mérések esetére is, és ezek az integrál-összefüggések – megfelelő súlyfüggvények bevezetése után – megadják az ún. Eötvös-féle peremérték-feladat megoldásán keresztül a nehézségi rendellenességeket, illetve geoidundulációkat a (3) összefüggés szerint (Tóth 2002):

$$N = \frac{R^2}{4\pi\gamma} \int_S E_1(\psi)(W_{xz} \cos \alpha + W_{yz} \sin \alpha) + E_2(\psi)(W_{\Delta} \cos 2\alpha + 2W_{xy} \sin 2\alpha) dS \quad (3)$$

Ebben az összefüggésben E_1 és E_2 megfelelő súlyfüggvények (az ún. Eötvös függvények), S a teljes földfelszínre vonatkozó integrálást jelöli, α a számítandó pont azimutja az integrálási pontban, ψ pedig a számítandó és az integrálási pont

gömbi szögtávolsága. A fenti megoldás szerint az Eötvös-inga mérések ismét jól felhasználhatók lesznek a geoid magyarországi darabjának még pontosabb meghatározására. Tanszékünkön jelenleg is intenzív kutatások folynak ebben az irányban.

Végül megemlíjtük az Eötvös-inga mérések egy újabb lehetséges és igen időszerű geodéziai alkalmazási területét, amely a műholdak méréseihez kapcsolódik, és különösen a 2006-ban indítandó ún. GOCE (Gravity and Ocean Circulation Experiment) műhold gradiométeres méréseihez (Rummel 2002) fog rendkívül fontos adatokat szolgáltatni. A világon egyedülálló sűrűségű magyarországi Eötvös-inga mérések segítségével ugyanis lehetőség nyílik arra, hogy elvégezzük ezeknek a gradiens értékeknek a műhold 250 km-es magasságára ún. analitikai felfelé folytatással történő átszámítását, amely közvetlenül összehasonlítható lesz a GOCE gradiométer által szolgáltatott gradiensekkel. Ezáltal mód nyílik a műhold mérési adatainak kalibrációjára, valódi földfelszínen mért gradiens adatok segítségével. Ez a modern geodéziai alkalmazás nagyszerű példáját adja annak, hogyan kapcsolódnak *Eötvös Loránd* több mint száz esztendeje megfogalmazott eredeti gondolatai napjaink legmodernebb mérési technikájához.

Megjegyzés

Az Eötvös-inga mérési eredmények geodéziai hasznosításával foglalkozó legújabb kutatásaink az MTA Fizikai Geodézia és Geodinamika Kutatócsoport, a görög–magyar kormányközi TÉT együttműködés keretében, illetve a T-030177 és a T-037929 sz. OTKA támogatásával folynak.

IRODALOM

J. Badekas–I. I. Mueller: Interpolation of deflections... Rep. of the Dep. of Geod. Sci, No. 98, The Ohio State Univ, (1967)

Detrekői Á.: Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest, (1991)

Eötvös L.: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft... Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1953)

Eötvös L.: Bericht über Geodätische Arbeiten... Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1953)

G. Hein: Veröff. der Deutschen Geod. Kom, Reihe C 264, DGK, München, (1978)

U. Heineke: Untersuchungen... Techn. Univ. Hannover, No.86, (1978)

Oltay K.: Az Eötvös-ingával végzett... Orsz. Magyar Termud. Alap, Budapest, (1927)

Oltay K.: Az Eötvös-ingával végezhető... Orsz. Magyar Termud. Alap, Budapest, (1928)

Renner J.: A függővonal-elhajlás. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. V. (1–2). (1952)

Renner J.: Untersuchungen über Lotabweichungen. Acta Technica. XV.(1–2). (1956)

Renner J.: Újabb vizsgálatok a függővonal-elhajlások körében. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXI. (1–4). (1957)

R. Rummel–G. Balmino–J. Johannessen–P. Visser–P. Woodworth: Dedicated gravity field... Journal of Geodyn. Vol.33, (2002)

Szabó Z.: Az Eötvös-inga története. Magyar Geofizika. Vol.40 (1), (1999)

Tóth Gy.: Eötvös-inga mérések... Geomatikai Közlemények III, (2000)

Tóth Gy.–Rózsa Sz.–Ádám J.–I. N. Tziavos: Gravity field modelling... Vol. 125 of IAG Symposium, Springer Verlag, (2002)

Völgyesi L.: Eötvös-inga mérések bevonása. Tanulmány, BME Felsőgeod. Tsz. (1976)

Völgyesi L.: Interpolation of deflection of the vertical... Periodica Polytechnica C.E, Vol.21 (1–2), Budapest, (1977)

Völgyesi L.: Interpolation of Deflection... Proc. of the 3rd Int. Symp. on Geod. and Physics of the Earth, Potsdam (1977)

Völgyesi L.: Függővonal-elhajlás interpoláció... I–II. Magyar Geofiz. XVIII. (5, 6), (1977)

Völgyesi L.: Correction of torsion balance measurements... Periodica Polytechnica C.E., Vol.24 (1–2), (1980)

Völgyesi L.: Interpolation of Deflection ... Per. Polytechnica C. E. Vol.37. (2), (1993)

Völgyesi L.: Test Interpolation of... Per. Polytechnica C. E. Vol.39 (1), (1995)

Völgyesi L.: Geoid Computations... Rep. of the Finnish Geod. Inst. 98:4, (1998)

Völgyesi L.: Local geoid... Acta Geod. et Geophysica Hung. Vol.36 (2), (2001)

Völgyesi L.: Geodetic applications of torsion balance... Rep. on Geod, Warsaw Univ. of Techn, No.2 (57), (2001)

Tóth Gy.–Völgyesi L.: Comparison of interpolation and collocation... EGS. XXVII General Assembly. Nice, (2002).

Importance of Eötvös torsion balance measurements and their geodetic applications

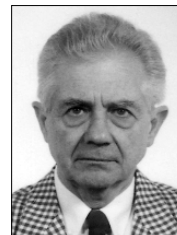
*Dr. L. Völgyesi–dr. Gy. Tóth
Summary*

There is a long tradition of research based on Eötvös torsion balance measurements for geodetic

applications in the Department of Geodesy and Surveying, TUB. We summarize in this paper the most important results of this long-term research.

A Tanszék Paksi Atomerőmű építésénél és üzeménél végzett műszaki ellenőrző, mérnökgeodéziai és fotogrammetriai feladatai

*Dr. Kiss Antal** egyetemi docens, *dr. Czakó János** egyetemi adjunktus-
*dr. Csemniczky László** egyetemi adjunktus, *Deák Ottó** tud. munkatárs-
*dr. Detrekői Ákos*** egyetemi tanár, *Homolya András** egyetemi adjunktus-
*dr. Kis Papp László** egyetemi tanár, *dr. Sárközy Ferenc** ny. egyetemi tanár
(*BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék)
(**BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék)



Bevezetés

A Tanszék Magyarország több jelentős nagyberuházása (mint pl. irodaházak, árvízvédelmi töltések, városrészek, hidak, gyárak, erőművek létesítése) mérnökgeodéziai munkáiban vett részt.

E tevékenységek közül kiemelt szereppel bírnak:

– a Paksi Atomerőmű I–IV. (400 MW-os) blokkjai műszaki előkészítésével, létesítésével, beüzeme-

melésével és üzemével kapcsolatos mérnökgeodéziai és fotogrammetriai feladatok megoldása;

– a Paksi Atomerőmű ipartelep (2x1000 MW-os) bővítés műszaki előkészítésében, tervezésében való részvétel;

– a fentiekkel kapcsolatos tervezések, műszaki fejlesztések, kutatások, műszaki ellenőrzések, vizsgálatok, szakértések.

A Paksi Atomerőmű építési munkáiban való részvétel már az 1960-as években elkezdődött,