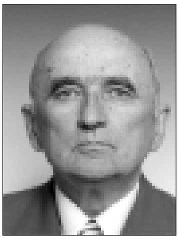

Földkéregmozgási hálózatok kiegyenlítése Hazay módszerének továbbfejlesztésével

Dr. Lőrinczi Gyula tud. főmunkatárs,
Román Akadémia – Geodinamikai Kutatóintézet*

Vertikális földkéregmozgások ismételt szabatos szintezéssel végzett vizsgálatánál lényeges elvi követelmény, hogy a hálózat szintezési vonalain végzett mérések lehetőleg egy időben történjenek. Ez a követelmény a jelenlegi mérnöki gyakorlatban igen nehezen elégíthető ki. *Hazay* javasolt egy kiegyenlítési módszert [2] arra az esetre, amikor a hálózat szintezési vonalain végzett mérések időpontja vonalanként különböző, de a vizsgálatra vonatkozó időintervallumban a vonalakon végzett szintezések száma azonos. Ebben a dolgozatban javasolunk egy eljárást *Hazay* módszerének a kiterjesztésére arra az esetre is, amikor a földkéregmozgási vizsgálatra vonatkozó időintervallumban a végzett szintezések ismétlési száma vonalanként különböző.

Tekintsük egy önálló szintezési hálózat gráfját, **p** ismeretlen magassági ponttal és **n** szintezési vonallal. Amennyiben minden szintezési vonalra csak egy-egy mérési eredménnyel rendelkezünk, akkor – csak mért mennyiségeket tartalmazó feltételi egyenletekkel történő kiegyenlítés esetében – a képezhető lineárisan független, zárt szintezési poligonok számát az

$$F = n - p + 1$$

képlettel határozhatjuk meg [1], feltéve, hogy a hálózat valamennyi vonalán mért magasságkülönbségeket egy közös **T'** mérési időponthoz tartozóknak tekinthetjük. Ekkor a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítés elvégezhető a képezett **F** lineáris egyenletekből álló, kompatibilis egyenletrendszer segítségével.

Ha a hálózat szintezési vonalain ugyanazokat a magasság-különbségeket egy későbbi **T''** időpontban ismét megmérik, ugyanannyi **F** számú feltételi egyenletünk lesz, mint az előző **T'** időponti mérések esetében. Csupán a megfelelő feltételi egyenletek szabad tagjai és a mérési eredmények súlyai között lehetnek eltérések. A két kiegyenlítésből minden vonalra két-két kiegyenlített értéket kapunk, és így lehetőség van a szintezési vonalakhoz tartozó magasságkülönbségek (T', T'') időintervallumra vonatkozó valószínű változásának a számítására és a változások sebességének a becslésére.

Amennyiben a tekintett szintezési hálózat **T'** és **T''** (T'' > T') időpontokra vonatkozó mérési eredményeit kiegyenlítettük, és egy tetszőleges szintezési vonal l' és l'' mért értékeihez meghatároztuk a legvalószínűbb v' és v'' javításokat, akkor az illető szintezési vonalon a magasságkülönbség valószínű változási sebessége

$$s = (l'' + v'' - l' - v')/(T'' - T'), \qquad (1)$$

ami geofizikai vizsgálatok szempontjából egy fontos mennyiség.

Az olyan hálózatok esetében, amelyeknél a szintezési vonalakon végzett mérési eredmények nem tekinthetők egy és ugyanazon T mérési időponthoz tartozóknak, a feltételi egyenletrendszer a fentemlített módon nem írható fel, mert a szabad tagok kiszámításához nem rendelkezünk azonos időpontokra vonatkozó mérési adatokkal. Az ilyen hálózatok kiegyenlítése végett dolgozta ki *Hazay* a módszerét [2], feltéve, hogy az ismétlések száma a hálózat minden vonalára nézve ugyanaz.

A módszer alapgondolata a következő: egy tetszőleges zárt poligon szintezési vonalaihoz tartozó, különböző időpontokra vonatkozó mérési eredményeket egy közös $\mathbf{t_0}$ időpontra redukálják, és a redukált adatokkal képezhető a feltételi egyenlet, mert a poligont képező vonalak szintezési eredményei mind a $\mathbf{t_0}$ időpontra vonatkoznak, és így a szabad tag számítható. Ha a poligon egy tetszőleges szintezési vonalához tartozó $\boldsymbol{l'}$ és $\boldsymbol{l''}$ értékeket **T'** illetve **T''** időpontokban mérték (T'' > T'), akkor az elsőnek tekintett szintezés $\boldsymbol{l'}$ eredményét egy konvencionálisan választott $\mathbf{t'_0}$ időpontra, a másodiknak tekintett szintezés $\boldsymbol{l''}$ eredményét

* Academia Romana – Institutul de Geodinamica
Str. Jean-Louis Calderon 19–21
70201 Bucuresti 37 – Romania
Tel: 00/40/21-211-5715; E-mail: Lorinczi@geodin.ro

egy **t"$_0$** időpontra redukálhatjuk. A segédidőpontokra redukált kiegyenlített magasságkülönbségi értékek a következőképpen fejezhetők ki :

$$h'(t'_0) = l' + v' + (t'_0 - T')\cdot s \qquad (2)$$
$$h''(t''_0) = l'' + v'' + (t''_0 - T'')\cdot s$$

Itt „s" az (1) képlettel megadott sebesség értékét jelenti.

Így minden zárt poligon vonalaira felírhatók a (2) kifejezések, az elsőnek tekintett szintezés minden vonalára nézve a **t'$_0$** érték ugyanaz, ugyanazokon a vonalakon a másodiknak tekintett szintezés mérési eredményeire pedig a **t"$_0$** érték ugyanaz.

Amennyiben ***a hálózat minden szintezési vonalán a mérési ismétlések száma, N, ugyanaz,*** (N≥2), akkor a kiegyenlítéshez felírandó feltételi egyenletek száma:

$$F = 2\cdot(N - 1)\cdot(n - p + 1). \qquad (3)$$

Hazay dolgozatában [2] ismertetett számpélda esetében N = 2, n = 6, p = 4, és így $F = 2\cdot(2\text{-}1)\cdot(6 - 4 + 1) = 2\cdot1\cdot3 = 6$ feltételi egyenlet írandó fel.

A (2) összefüggés az (1) figyelembevételével így írható:

$$h'(t'_0) = \{(T''- t'_0)/(T''- T')\}\cdot v' + \{(t'_0 - T')/(T''- T')\}\cdot v'' + r',$$
$$h''(t''_0) = \{(T''- t''_0)/(T''- T')\}\cdot v' + \{(t''_0 - T')/(T''- T')\}\cdot v'' + r'', \qquad (4)$$

ahol

$$r' = \{(T''- t'_0)/(T''- T')\}\cdot l' + \{(t'_0 - T')/(T''- T')\}\cdot l'',$$
$$r'' = \{(T''- t''_0)/(T''- T')\}\cdot l' + \{(t''_0 - T')/(T''- T')\}\cdot l''. \qquad (5)$$

A (4)- és (5)-ben **h'(t'$_0$)** és **r'** az első szintezésre, **h"(t"$_0$)** és **r"** a második szintezésre vonatkozik. Összeadva a zárt poligon összetevő oldalaira a **h'(t'$_0$)** és **h"(t"$_0$)** kiegyenlített magasságkülönbségeket, megkapjuk a poligonhoz rendelt két feltételi egyenletet az első, illetve a második szintezésre:

$$\Sigma\ h'(t'_0) = 0\ ; \quad \Sigma\ h''(t''_0) = 0. \qquad (6)$$

Ezeknek az egyenleteknek a szabad tagjai :

$$t' = \Sigma\ r'; \quad t'' = r''. \qquad (7)$$

Amennyiben a hálózat minden szintezési vonalán a mérési ismétlések száma **N,** akkor a feltételi egyenletek számát a (3)-as képlet fejezi ki.

A gyakorlatban előfordulnak olyan esetek is, amikor a szintezési hálózat vonalain ***különböző számú ismételt mérésekkel rendelkezünk,*** és ezekkel az adatokkal kell a kiegyenlítést elvégeznünk.

A *Hazay* által megállapított (6) és (7) képletek érvényesek ezekben az esetekben is, ilyenkor egyes mérési eredmények szükségszerűen több poligon egyenleteinek a felírásakor is szerepelhetnek más-más **t$_0$** segédidők használatával. A feltételi egyenletek számát az egész hálózatra nézve, ilyen esetekben, az

$$F = 2\sum_{i=1}^{n-p+1}(N_i - 1) \qquad (3')$$

képlettel számíthatjuk, ahol N_i az i-edik zárt poligon szintezési vonalain levő ismételt mérések számának a maximuma. Könnyen belátható, hogy ha a hálózat vonalain az ismétlések száma ugyanaz, vagyis N_i = N (i = 1, 2, ..., n-p+1), akkor (3')-ből következik (3). Ilyen szükség esetek állhatnak elő a hosszú ideig elhúzódó geofizikai vizsgálatok kapcsán, amikor még nem sikerült a hálózat minden vonalán elvégezni az előirányzott **N** számú ismételt szintezést, de meg kell határozni a földkéreg függőleges mozgási amplitúdóját az adott ideig elvégzett mérések alapján, figyelembe véve minden elvégzett mérés adta információt.

Megjegyzések:

1^0. Egy tetszőleges szintezési vonalra érvényes (4)-es összefüggésben a **v'** és **v"** ismeretlenek együtthatóinak összege mindig 1, amint az könnyen belátható.

Ez a tulajdonság felhasználható a feltételi egyenletek képzésének az ellenőrzésére, ugyanis a poligonra vonatkozó egyenletek együtthatóinak összege egyenlő kell, hogy legyen a poligon körüljárási irányába mutató szintezési vonalak számával, mínusz az ellentétes irányba mutató vonalak számával.

2^0. Egy tetszőleges szintezési vonal (5)-ös számú szabadtag összetevőiben az ***l'*** és ***l"*** mért magasságkülönbségek együtthatói ugyanazok, mint a (4)-es összefüggésben a **v'** és a **v"** ismeretlenek együtthatói.

Ez a sajátosság a (7)-es képlettel megadott **t'** és **t"** szabad tagok számítását könnyíti meg, ugyanis a **t'** egyenlő az első egyenlet együtthatóiból álló vektor és a nekik megfelelő mért magasságkülönbségek vektorának a skaláris szorzatával. Ugyanez a helyzet a **t"** számításánál is, azaz a második egyenlet együtthatóiból álló vektor skaláris szorzata a nekik megfelelő mért magasságkülönbségek vektorának a skaláris szorzatával egyenlő.

Az **1^0** és **2^0** tulajdonságokat nem kell minden poligonra vonatkozó egyenletpár képzésekor külön-külön alkalmazni, mert a hálózat kiegyenlítésénél a mért magasságkülönbségek vektora ugyanaz az egész hálózat egyenletrendszerére nézve, és így az [m,n] dimenziójú **A** együttható-mátrix szorzata az [n,1] dimenziójú **L** mért mennyiségek mátrixával az [m,1] dimenziójú **T** szabadtag vektort eredményezi, tehát a hálózathoz tartozó feltételi egyenletrendszer szabadtagjainak vektora :

$$T = A \cdot L \qquad (8)$$

A vranceai szeizmikus zóna szabad szintezési hálózata esetében a vonalankénti szintezések ismétlési száma általában nem ugyanaz minden vonalra nézve. Ezért a feltételi egyenletek képzéséhez szükség volt a $\mathbf{t_0}'$ és a $\mathbf{t_0}''$ segédidőpontok használatára is. *Hazay* véleménye szerint [2] ezek értékét a (4)-es egyenletek felírásához tetszőlegesen választhatjuk. Erre alapozva, a következőképpen jártunk el: bármely zárt poligon első, illetve második szintezési feltételi egyenletének a felírásához képeztük a

$$t_0' = \min\{T_1', T_2', \ldots, T_z'\}$$
$$t_0'' = \max\{T_1'', T_2'', \ldots, T_z''\} \qquad (9)$$

értékeket, ahol „**z**“ az illető zárt poligon szintezési vonalainak a száma.

A kiegyenlítés végrehajtásához szükséges lépések:

1⁰. A szintezési hálózat ábrájának (multigráfjának) az összeállítása; a szintezési vonalakon végzett mérésenként egy-egy vonallal összekötjük a szomszédos magassági pontokat, feltüntetve minden megrajzolt vonalon a hozzátartozó ***mérés*** $\boldsymbol{T_i}$ ***időpontját*** konvencionális időegységben kifejezve (pl. hónapokban vagy más időegységben) és a ***megmért magasságkülönbség*** $\boldsymbol{l_i}$ ***sorszámát*** az egységes számozás szerint (i = 1, 2, ..., n; ahol „n“ a hálózatban megmért összes magasságkülönbségek száma). A hálózat magassági pontjainak a számát jelöljük „**p**“-vel.

2⁰. A hálózat feltételi egyenleteinek az összeállítása a (3'), (4), (6), (8) és (9)-es képletek figyelembevételével történik:

$$A \cdot V + T = O. \qquad (10)$$

A (10)-es mátrixegyenletben $A = [a_{ij}]$ a (6)-os képletek alkalmazásával képezett feltételi egyenletrendszer együtthatóinak a mátrixa, ahol

i = 1, 2 ..., m

(m = a hálózat feltételi egyenleteinek a száma); j = 1, 2, ..., n (n = a hálózatban mért ismételt mérések száma). A szintezési hálózathoz rendelt (10)-es egyenletrendszerre nézve minden esetben m < n. Ez azt jelenti, hogy (10)-nek végtelen sok megoldása van. Ezek között található a kiegyenlítésból adódó optimális $V = [\, v_j \,]$ javítások vektora is (j = 1, 2, ..., n);

$T = [\, t_i \,]$, (i = 1, 2, ..., m), a feltételi egyenletek szabad tagjainak a (8)-as képlettel számítható vektora, $T = A \cdot L$, ahol **L** a mért magasságkülönbségi értékek vektora: $L = [l_j]$, (j = 1, 2, ..., n). **L**-hez társul még a mérési eredmények súlyának a diagonális mátrixa: $P = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$.

Az A, V, T, L és P mátrixok ismeretében rátérhetünk a kiegyenlítésre.

3⁰. A kiegyenlítés alapkövetelménye, hogy a feltételi egyenletrendszer kompatibilis legyen, azaz, ha az A mátrix rangja, F megegyezik a szabadtag T vektorával bővített mátrix rangjával [3, 4] :

$$F = \text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A\ T). \qquad (11)$$

A (11) egyenlőség teljesülése a (10)-es egyenletrendszer kompatibilitását igazolja. Ellenkező esetben át kell vizsgálni a feltételi egyenleteket, és a hibát ki kell javítani.

A gyakorlatban két eset lehetséges.

a) F = m. Ekkor a (10)-es egyenletrendszerrel elvégezhető a kiegyenlítés a szakirodalomból ismert módon [1].

b) F < m. Ebben az esetben a (10)-es feltételi egyenletrendszerben létezik

d = m – F lineárisan összefüggő feltételi egyenlet. A kiegyenlítés előtt ezeket el kell különíteni a feltételi egyenletrendszerből.

Az elkülönítést *Gauss-Jordan* módszerével valósítjuk meg [4, 5, 6]. Az algoritmus ismertetése érdekében rendeljünk a (10)-es egyenlethez egy lineáris formát a következőképpen:

$$Y = A \cdot V + T, \qquad (12)$$

ahol $Y = [y_i]$ (i = 1, 2, ..., m) egy a **V** független változó vektortól függő vektor.

Ha (12)-ben a függő változó **Y** vektor egy $\mathbf{y_k}$ komponense helyet cserélhet a független változó **V** vektorának egy $\mathbf{v}_l$ komponensével, ez azt jelenti, hogy az átvitt $\mathbf{y_k}$ függő komponens függetlenné, a vele helyet cserélő $\mathbf{v}_l$ független komponens függő komponenssé válik. A helycserét *Gauss-Jordan* algoritmusának az alkalmazásával végezzük el. Elvégezve az algoritmus által megengedett összes lehetséges helycseréket, az **Y** vektor függetlennek tekinthető komponensei átkerülnek a jobb oldalra, a **V** független vektor komponensei közé. Az így átvitt $\mathbf{y_i}$ komponenseknek megfelelő feltételi egyenletek képezik a b) esetben a keresett lineárisan független egyenletrendszert, melyeknek száma F = m – d. Ezekkel elvégezhető a kiegyenlítés az ismert módon [1]. Megjegyezzük, hogy a (11)-es kompatibilitási követelmény teljesülése következtében a kiegyenlítés előtt elkülönített lineárisan összefüggő feltételi egyenleteket is kielégítik a lineárisan független feltételi egyenletekkel kapott optimális v_j (j = 1, 2, ..., n) javítások értékei , tehát a kapott megoldás optimális az eredeti (10)-es egyenletrendszerre is.

4^0. A lineárisan független feltételi egyenleteket kiválasztó algoritmus a következő: tegyük fel, hogy a (12)-es lineáris formában az A matrixban találtunk egy nullától különböző g = akl elemet. Ennek a felhasználásával az Y vektor yk komponense helyet cserél a V vektor vl komponensével, ha elvégezzük a következő transzformációkat:

$$a_{ij} = \begin{cases} (a_{ij} \cdot g - a_{il} \cdot a_{kj}) / g \; ha (i \neq k) \wedge (j \neq l) \\ a_{ij} / g \;\; ha (i \neq k) \wedge (j = l) \\ - a_{ij} / g \; ha (i = k) \wedge (j \neq l) \end{cases} \qquad (13)$$

$$t_i = \begin{cases} (t_i \cdot g - a_{il} \cdot t_k) / g \; hai \neq k \\ \\ - t_i / g \;\; hai = k \end{cases} \qquad (14)$$

ahol $g = a_{kl}$ és i = 1, 2, ..., m ; j = 1, 2, ..., n.

IRODALOM

[1] *Detrekői Ákos:* Kiegyenlítő számítás, Budapest, Tankönyvkiadó, 1991, 180–202. old.

[2] *Hazay István:* A vertikális kéregmozgási hálózatok kiegyenlítése, Geodézia és Kartográfia, 1967/5. szám, 321–324. old.

[3] *Szele Tibor*: Bevezetés az algebrába, Debrecen, Tankönyvkiadó, 1957, 147–155. old.

[4] *Obádovics J. Gyula–Szarka Zoltán:* Felsőbb matematika, Budapest, Scolar Kiadó, 1999, 379–380.; 385–387. old.

[5] *Stiefel, Eduard:* Bevezetés a numerikus matematikába, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1973, 9–28. old.

[6] *Zuhovickij, S. I.–Avdeeva, L. I.:* Linejnoe i vüpukloe programmirovanie, Moszkva, 1967, 11–26. old.

Extension of the Hazay's adjustment method for the earthcrust's movement network

Gy. Lőrinczi

Summary

At repeated high-precision levelling network measurements for vertical earthcrust's movements studies, it is an important principial requirement to have simultaneous measurements along the levelling lines. This requirement is very difficult to be satisfied in nowadays engineering praxis. Hazay proposed a method [2] for the case, when the moments of the measurements along the levelling lines are different, but the number of the repeated levellings on each line are the same. In this paper we suggest an extension of Hazay's procedure also for cases, when the number of repeated levelling along the levelling lines are different.