

Magassági mérőszámok és azok kapcsolata Magyarországon

Dr. Ádám József akadémikus, a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
tanszékvezető egyetemi tanára,

Tokos Tamás, az MTA-BME Fizikai Geodézia és
Geodinamikai Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa,
Dr. Tóth Gyula, a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
tudományos főmunkatársa



1. Bevezetés

A GPS-technika szerepe a magasságmeghatározásban lényegesen növekedni fog már a közeli jövőben is. A GPS-mérésekből ellipszoid feletti magasságokat, illetve ellipszoidi magasságkülönbségeket nyerünk, amelyeknek a földmérés és a mérnökgeodézia területén szükséges geodéziai magassági értékké történő átszámítása alapvető fontosságú. A megfelelő magassági mérőszám alkalmazása gondos körültekintést igényel, amelyre már az 1990-es évek elején felhívtuk a figyelmet [1-3].

Ismeretes, hogy hazánkban eddig négy alkalommal fejlesztettek ki országos felsőrendű szintezési hálózatot. A legutóbbi hálózatunk (Egységes Országos Magassági Alapponthálózat = EOMA) újramérése is már időszerűvé vált. Az egyes országos szintezési hálózatok alappontjai magassági értékének megadására különböző magassági mérőszámokat alkalmaztak. Ezért mind gyakorlati, mind tudományos szempontból indokolt az, hogy tanulmányunkban foglalkozunk a különböző magassági mérőszámokkal és határozzuk meg eltéréseik számértékét Magyarorszag területén, továbbá átfogóan elemezzük az eltérések mértékét a GPS-technikával történő, szélső pontosságú magasságmeghatározás szempontjából.

2. Magassági rendszerek és vonatkozó alapelületek

Jelenleg két alapvetően eltérő magassági rendszert használunk a gyakorlatban, amelyek közel azonos pontossági szinten valósíthatók meg.

2.1. Nehézségi erőtérről összefüggő magassági mérőszámok

A nehézségi erőtérről kapcsolódó magassági rendszer ismeretesen a szintezési vonal mentén végzett szabatos geometriai szintezésen és a hozzákapcsolódó gravimetriai méréseken alapszik. Ezekből a mérésekből feltevésmentesen ún. geopotenciális számok származtathatók, amelyek a geoidhoz, mint magassági alapszintfelülethez viszonyított potenciálkülönbségek.

Valamely P földfelszíni pont geopotenciális értékén [4] (1. ábra) a P ponton átmenő szintfelületnek valamely kiválasztott 0 kezdőponton átmenő alapszintfelülethez (a *geoid*hoz) viszonyított potenciálkülönbségét értjük, és K_p -vel jelöljük. Legyen a geoid potenciálja W_0 , akkor a geoid és a P pont magasságkülönbsége jellemezhető a

$$K_p = W_0 - W_p = \int_0^P g dm \approx \sum_0^P g_i m_i \quad (1)$$

zonyos feltételezésekkel (különböző modellek alapján) számítható ki. Az ortométeres magasság általában jól használható, több ország is alkalmazza. Hátránya, hogy nem felvésmentes, és hogy az azonos ortométeres magasságú pontok általában nem azonos szintfelületen fekszenek.

Ez utóbbi hátrányon úgy lehet segíteni, ha a P pont geopotenciális értékét valamely megállapodásszerűen rögzített normál nehézségi erő értékkel osztjuk el. Így a K_p értékkel arányos nagyságú, de hosszúság jellegű magassági mérőszámra jutunk, amelyet *dinamikai magasságnak* nevezünk:

$$H_p^d = \frac{K_p}{\gamma_{45^\circ}} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \sum_0^P g_i \Delta m_i. \quad (4)$$

A képletben γ_{45° a 45° földrajzi szélességre vonatkozó normál nehézségi térerősség, amelyet valamely nemzetközileg elfogadott normálképlettel határozhatunk meg. Rédey [6,7] a $\varphi = 90^\circ$ helyen (az északi sarkon) a valódi nehézségi térerősség $H/2$ magasságra vonatkozó értékének használatát javasolta (azaz a Föld forgástengelyét ajánlotta vonatkozási függőlegesként).

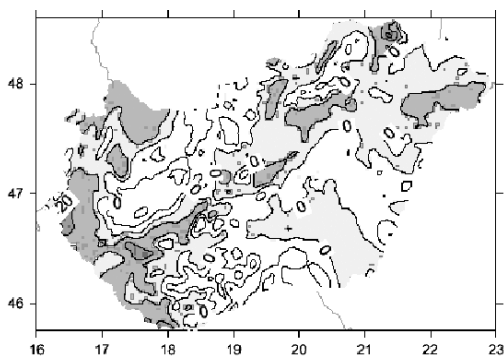
Mivel a valódi nehézségi erőterben értelmezett ortométeres magasság csak feltételezésekkel határozható meg, ezért ezen hátrány kiküszöbölése céljából vezették be a normálmagasság fogalmát. A *normálmagasság* a P pont geoidhoz viszonyított $W_0 - W_p$ valódi potenciálkülönbségének a normál nehézségi erőterben megfelelő Q_0Q (1. ábra) függőleges távolság a vonatkozási szintellipszoid felett:

$$H_p^n = \frac{K_p}{\tilde{\gamma}_p} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_p} \sum_0^P g_i \Delta m_i. \quad (5)$$

A nevezőben szereplő $\tilde{\gamma}_p$ átlagos normál nehézségi térerősség értéket úgy kapjuk, hogy a felvett normál nehézségi térerősség képletből a szintellipszoid felületére kiszámítható értéket a tiszta magassági hatással az ellipszoid fölé $H_p^n/2$ magasságra átszámítjuk. A normálmagasság az $U=U_0=W_0$ potenciálértékű szintellipszoid Q_0 pontja és a telluroid Q pontja közötti távolságot jelenti a normál függővonal mentén „mérve“. A normálmagasság tehát a mérési eredményekből felvésmentesen, tetszőleges pontossággal számítható. Értéke közel áll az ortométeres magassághoz, földi viszonylatban az eltérés maximuma

2 méter (a Himalájában). Egyetlen hátránya, hogy az azonos szintfelületen lévő pontok normálmagassága csak akkor azonos, ha azonos szélességen fekszenek.

Mint láttuk, valamely középtengerszint magasságában haladó szintfelületnek, a geoidnak alapvető fontosságú szerepe van a magasságmeghatározásban. Magassági alapszintfelületként szolgál a geopotenciális értékek számításához, amelyekből az előbbieken említett magassági mérőszámokat származtatjuk. Közülük a gyakorlatban leginkább az ortométeres magasságot és a normálmagasságot használják. Amennyiben a H^0 normálmagasságot tekintjük a P pont magassági értékének, akkor a vonatkozási felületül a geoid helyett a kvázigeoidot kell alapul választanunk. Ezzel szemben, ha a H^0 ortométeres magasságot tekintjük a P pont magassági értékének, akkor a geoid a vonatkozási alapfelületünk.



2. ábra Bouguer-féle nehézségi rendellenességek; -31,8 mGal-tól 25,2 mGal-ig (izovonalköz 10 mGal).

2.2 Ellipszoidi magassági rendszer

Az ún. ellipszoidi magassági rendszert a korszerű műholdas technikák (pl. korábban a doppleres, jelenleg pedig a GPS-szel történő helymeghatározás) méréseiből nyert magassági adatok validálják meg. Meghatározásaink eredményei a földfelszíni pontok geocentrikus térbeli derékszögű koordinátái, melyek alapján ellipszoidi földrajzi koordináták (így ellipszoid feletti magasságok) számíthatók. Ez a magassági rendszer csak geometriai értelemben adott, amelyet a nehézségi erőter helyi vagy regionális időbeli változásai nem befolyásolnak.

Az ortométeres vagy normálmagasság, ill. magasságkülönbség és a GPS-technika alkalmazásával történő magasságmeghatározás alapösszefüggései a következők (1. ábra):

$$H_p^o = h - N, \quad (6a)$$

$$\Delta H_p^o = \Delta h - \Delta N, \quad (6b)$$

illetve

$$H_p^n = h - \zeta, \quad (7a)$$

$$\Delta H_p^n = \Delta h - \Delta \zeta. \quad (7b)$$

Mivel a h ellipszoid feletti magasságok, illetve Δh ellipszoid feletti magasságkülönbségek a nagy pontosságú GPS-mérések feldolgozásából ismertek, ezért az alapprobléma a kapcsolódó N geoidundulációk és a ζ magassági anomáliák, illetve a ΔN geoidunduláció-különbségek és a $\Delta \zeta$ magassági anomália-különbségek számítása a szükséges pontossággal.

3. A magassági mérőszámok eltéréseinek értékei Magyarországon

Az 1. ábra alapján a következő kapcsolat állítható fel az ortométeres és a normálmagasság, illetve a geoidunduláció és a magassági anomália között [8(325-328.old.)]:

$$h = H^o + N = H^n + \zeta, \quad (8)$$

$$N - \zeta = \frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} H^o = H^n - H^o = \delta H. \quad (9)$$

A (9) szerint az N geoidunduláció és a ζ magassági anomália közötti különbség a H^n normálmagasság és a H^o ortométeres magasság közötti δH különbséggel egyezik meg. Mivel a ζ a kvázigeoid undulációja, ezért a δH különbség a geoid és a kvázigeoid közötti távolság értékét adja meg. A [8] 327. oldalán kimutatják, hogy

$$\frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} H^o \approx \frac{\Delta g_B}{\tilde{\gamma}} H^o, \quad (10)$$

ahol Δg_B a Bouguer-féle nehézségi rendellenesség. Az $(N - \zeta)$ különbség számszerű becslésére a [8] a következő összefüggést adja meg:

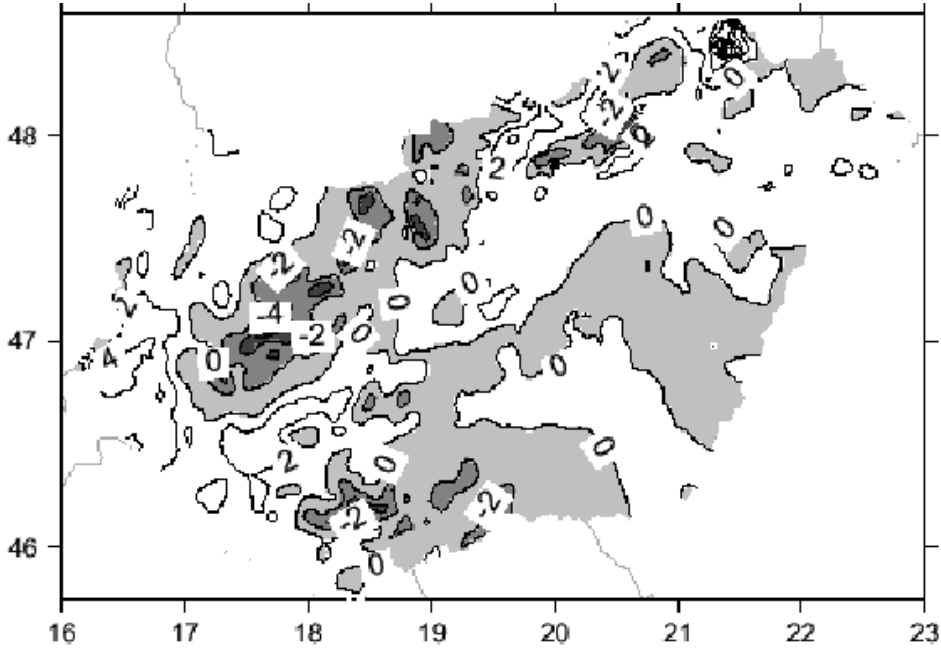
$$(N - \zeta) = \Delta g_B H^o, \quad (11)$$

amelyben, ha Δg_B -t [Gal]-egységben és a H^o -t [km]-egységben adjuk meg, akkor az $(N - \zeta)$ különbséget méterben kapjuk meg. A (9) értelmében a (11) összefüggés használható a normálmagasság és az ortométeres magasság közötti különbségek számítására is.

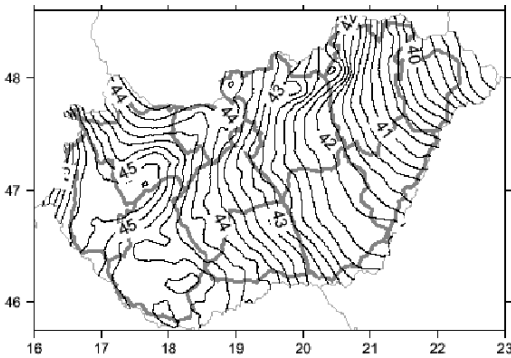
A geoid és a kvázigeoid magyarországi felületdarabja, illetve a normálmagasságok és az ortométeres magasságok közötti különbség számszerű meghatározásával már a [9] keretében foglalkoztunk. Vizsgálatainkhoz a (11) képlet alapján azokat az adatokat használtuk fel, amelyeket az európai geoidfelület meghatározásához küldtünk ki a Hannoveri Egyetemre [10]. A Bouguer-anomáliák és a szükséges magassági adatok mindkét halmaza 13089 db 1,5' x 2,5'-es méretű (2,7 km x 3 km) rácsháló sarokpontjaira interpolált értékeket tartalmaznak (2. ábra).

A normálmagasságok és az ortométeres magasságok közötti eltérések (11) alapján meghatározott számszerű értékei Magyarországon +7,4 mm és -17,4 mm között változnak. A meghatározott δH értékek izovonalas ábrázolását a 3. ábrán mutatjuk be. Jól látható a topográfiaival az összhang. Magyarország legnagyobb részén a δH korrekció értéke kisebb mint egy cm. Ezért a δH értéke a GPS-technikával történő magasságmeghatározásban (a (6a) és a (7a) képletek alkalmazásában) elhanyagolható. Azonban néhány térségben a δH korrekció értéke már 1-2 cm között van, amely már nem hanyagolható el, különösen a (6b) és a (7b) képletek alkalmazásakor a ΔH^o (illetve a ΔH^n) magasságkülönbségek meghatározásában. Ez a körülmény fontos lehet az EOMA I. rendű szintezési vonalai újraméréseinek feldolgozásakor (4. ábra) [11].

Megjegyezzük, hogy a (9) és a (11) képlet alkalmazásával az ortométeres magasságok (illetve geoidundulációk) normálmagassági értékekké (illetve magasságianomália-értékekké) számíthatók át. Ezt a gyakorlatot követték a [12]-ben is. A δH értékek meghatározására a [13] nem a (11) közelítő megoldást használta, hanem az ún. közvetlen eljárást, amelynek során meghatározták a geoid és a kvázigeoid ausztriai felületdarabját, és képezték ezek eltéréseit. Hasznos lenne ezen az úton is meghatározni a δH értékeket hazánk területére is, mert ezzel a geoid-, illetve a kvázigeoid-meghatározás Magyarországon alkalmazott módszereinek (szoftverek, adatbázisok, redukciós eljárások stb.) [11,14] független ellenőrzését lehetne biztosítani.



3. ábra Normál- és ortométeres magasságok eltérései (izovonalköz 2 mm).



4. ábra Az EOMA I. rendű szintezési vonalai (vastag folytonos vonal). Az ábra tartalmazza a geoid felületdarabját is (izovonalköz 0,2 m).

A normálmagasság és a dinamikai magasság közötti eltérés számszerű értékeinek megállapítására az EOMA I. rendű szintezési vonalainak mintegy 750 alappontjára vonatkozó geopotenciális értéket használtuk fel [5, 15]. A (4) és az (5) képlet alkalmazásához a megfelelő normál nehézségi gyorsulás értéket a GRS80 jelű normálképlet alkalmazásával számítottuk [16]:

$$\gamma = 9,780327 (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) \text{ m/s}^2, \quad (12)$$

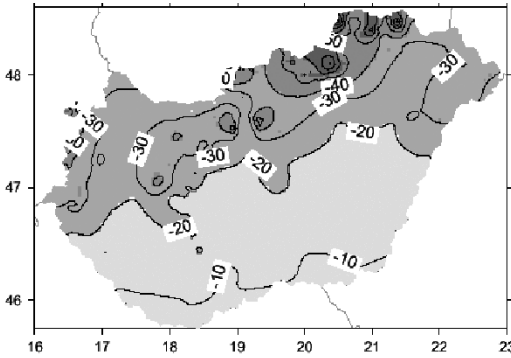
ahol φ a kérdéses szintezési alappont ellipszoidi földrajzi szélessége. A (12) a GRS80 jelű szintellipszoid felszínén írja le a normál nehézségi térerősség eloszlását.

Az 5. ábra a normálmagasság és a $\varphi = 45^\circ$ földrajzi szélességre vonatkozó γ_{45° normál nehézségi térerősség alapján számított dinamikai magasság eltéréseit mutatja izovonalas ábrázolásban. Jól látható az ábrán, hogy az eltérések -1 cm és -9 cm között változnak.

4. Összefoglalás

Tanulmányunkban áttekintettük a geodéziai gyakorlatban alkalmazott magassági rendszereket, és meghatároztuk a nehézségi erővel összefüggő magassági mérőszámok eltéréseinek értékeit Magyarországon. A normálmagasság és az ortométeres magasság közötti eltérések értékét (3. ábra) több mint 13 000 pontban (2,7 km x 3 km rácsháló sarokpontjaiban) a (11) közelítő képlet alapján, a normálmagasság és a dinamikai magasság eltéréseit (5. ábra) pedig az EOMA I. rendű szintezési vonalainak mintegy 750 alappontjában az ismert geopotenciális értékek alapján határoztuk meg.

Mivel a geometriai szintezés és a gravimetriai mérések alapján származtatott geopotenciális értékek, valamint a GPS-mérésekből nyerhető magassági értékek vonatkozásában hasonló mértékű



5. ábra Normál- és dinamikai magasságok eltérései (izovonalköz 10 mm).

pontosság érhető el, ezért a két egymástól eltérő mérési technika adatainak egyesítése és kölcsönös ellenőrzése eredményesen alkalmazható nagy méretű magassági ellenőrző hálózat létrehozása, szélső pontosságú mérnökgeodéziai feladatok megoldása, továbbá a geoid (illetve a kvázigeoid) meghatározása céljából.

IRODALOM

1. *Ádám J.*: A geoid szerepe a GPS alkalmazásában. Továbbképző szeminárium, ELGI, 1991. április 11.
2. *Ádám J.*: A geoidmeghatározás és a GPS-technika geodéziai alkalmazásának kölcsönös kapcsolatáról. MFTTT-előadás, Budapest, 1991. május 30.
3. *Ádám J.*: Magasságmeghatározás GPS-technikával. 10. Kozmikus Geodéziai Szeminárium, Sopron, 1993. október 7-8.
4. *Biró P.*: Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
5. *Ádám J. – Németh Zs. – Tokos T.*: Az EOMA elsőrendű hálózatának csatlakoztatása az egységes európai szintezési hálózathoz. *Geodézia és Kartográfia*, 51(1999), 2(16-23).
6. *Homoródi L.*: Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
7. *Rédey I.*: A dinamikai magasságról. *MTA Műszaki Tud. Oszt. Közölny.*, VII (1965), 4.
8. *Heiskanen, W.A. – Moritz, H.*: Physical Geodesy. Freeman and Co., San Francisco, 1967.
9. *Ádám J.*: Difference between geoid undulation and quasigeoid height in Hungary. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, Vol. 40, No. 3-4, pp. 571-575, 1999.

10. *Ádám J.*: Magyarország hozzájárulása a geoid európai felületdarabjának újbóli meghatározásához. *Geodézia és Kartográfia*, 49 (1997), 12(7-13).
11. *Tóth Gy. – Rózsa Sz.*: New datasets and techniques – an improvement in the Hungarian geoid solution. Paper presented at the GGG 2000 Conference, Banff, Alberta, Canada July 31-Aug 4 (2000)
12. *Dahl, O.C. – Forsberg, R.*: Geoid models around Sognefjord using depth data. *Journal of Geodesy*, 72 (1998), pp. 547-556.
13. *Sünkel, H.*: The Gravity Field in Austria. Geod. Arbeiten Öst. für die Int. Erdmessung, Neue Folge, Band IV. pp. 47-75, Graz, 1987.
14. *Kenyeres A.*: A geoid hosszúhullámú komponense a Stokes-integrál módosítási eljárásaiban és a GPS-gravimetriai geoidban. PhD értekezés, FÖMI/KGO, Penc 2001.
15. *Tokos T.*: Normálmagasságok meghatározása geopotenciális értékekből. TDK-dolgozat, BME Felsőgeodézia Tanszék. Budapest, 1998.
16. *Moritz, H.*: Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, 74(2000), 1(128-133).
17. *Kenyeres A. – Borza T.*: Technológiafejlesztés a III. rendű szintezés GPS-technikával történő kiváltására. *Geodézia és Kartográfia*, 52(2000), 1(8-14).

Height systems and their relations in Hungary

Dr. J. Ádám – T. Tokos – Dr. Gy. Tóth
Summary

The role of GPS technique for the determination of heights and height differences will increase in Hungary in the near future, too. The conversion of ellipsoidal heights (or height differences) from GPS into useful geodetic heights (or height differences) is a question of primary importance. Three types of heights are shortly reviewed. The difference between normal heights and orthometric heights in Hungary (Fig. 3) was estimated by an approximate formula given in [8] using a data set of interpolated 1,5'x 2,5' gridded Bouguer anomalies and elevations. The difference between normal and dynamic heights (Fig. 5) was computed at about 750 bench marks of the first order leveling lines (EOMA) of Hungary.

The results obtained are discussed from the point of view of the precision GPS heighting.