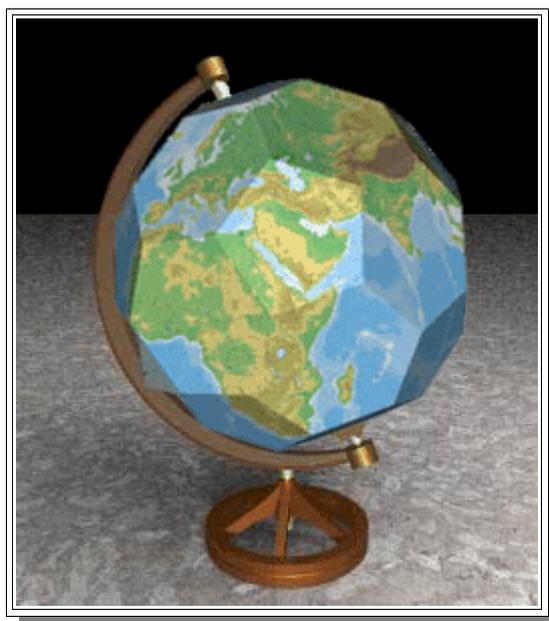


POLIÉDER VETÜLETEK

**Készítette:
Fehér Dániel**

**Témavezető:
Dr. Györffy János**



**ELTE, Térképtudományi Tanszék
Budapest, 2003.**

BEVEZETÉS

A poliéder olyan zárt felület, amely sík sokszögekből áll. Sokszor poliéder alatt az ilyen felülettől határolt térrészt is értik. Ezek közül kiemelendők a szabályos vagy Platon-féle poliéderek, amelyeknek oldallapjai kongruens szabályos sokszögek és szögletei kongruens szabályos szögletek. Ilyen öt féle létezik: a szabályos tetraéder, a szabályos oktaéder, a szabályos ikozaéder, a szabályos hexaéder (kocka) és a szabályos dodekaéder. Az Euler-féle poliéderekhez tartoznak még a félig szabályos vagy Arkhimédész-féle poliéderek is. Ezeknek oldallapjai szintén szabályos sokszögek, amelyek azonban már nem kongruensek egymással, de szögleteik mind kongruensek.

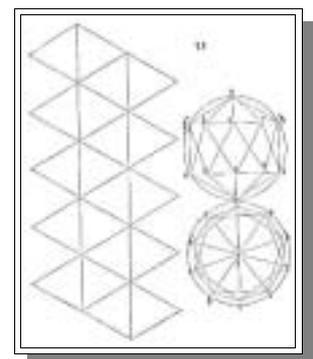
Általában elmondható, hogy minél több lapja van egy poliédernek, annál jobban megközelíti a Föld-alakot, azaz a gömböt.

A cél, hogy ezekre a térbeli idomokra vetítsük a gömbfelszínt, többféleképpen kivitelezhető. A gömböt először feloszthatjuk gömbi poligonokra (melyeknek oldalai gömbi főkörök), és ezeket transzformáljuk a nekik megfelelő síkidomokra. Ehhez alapfeltétel, hogy a határoló oldalak, tehát a gömbi főkörök egyenesekre képeződjenek le. A gnomonikus vetület rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden főkör képe egyenes, tehát ez a vetület bármely (konvex) poliéder esetében használható. Ezen kívül kereshetünk még olyan vetületeket, melyek csak bizonyos főköröket képeznek egyenes vonalra.

Másik módszer, hogy a fokhálózat mentén osztjuk fel a gömböt, általában foktrapézokra és olyan gömbháromszögekre, melyek határolóoldalai két meridián és egy paralelkör, majd ezeket transzformáljuk síkidomokra (trapézokra, háromszögekre). Az alapfeltétel ebben az esetben is ugyanaz, vagyis a határoló fokhálózati vonalaknak egyenesre kell leképeződniük.

Történeti áttekintés

A térbeli idomok, mint képfelületek, használatának ötlete már *Albrecht Dürer*nek is eszébe jutott, különösen a már említett öt szabályos test. 1525-ös *Underweysung der Messung* című könyvében találhatóak az első ismert poliéder-hálók, vagyis poliéderek lapjai síkba kiterítve. Dürer számos poliéderrel kísérletezett egy földgömb-szerű mű megalkotásához, azonban ez sohasem készült el.



1. ábra: Dürer ikozaéder-hálója

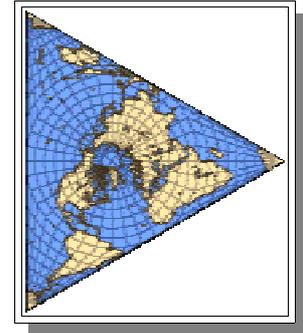
A német *Hermann Berghaus* (1828-1890) csillag-vetületének háromágú változata is összehajtható egy tetraéderré, habár kifejtésének semmi köze sincs a poliéderekhez.

Berghaus 1879-ben alkotta meg először az ötágú változatát. Ezen az északi félteke azonos volt egy Postel-féle síkvetülettel, a déli féltekét pedig öt lebernyegre vágta szét. A paralelkörök képe koncentrikus kör, a meridiánok pedig egyenesek, amelyek az Egyenlítőnél megtörnek (az öt



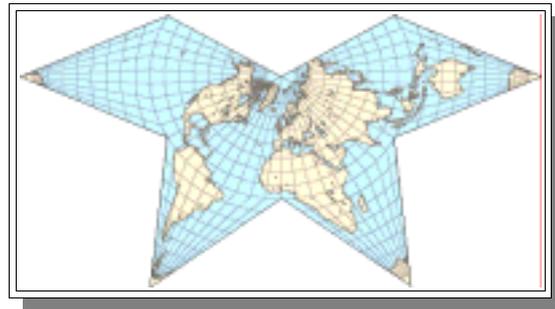
2. ábra: Az AAF logó

középsőt kivéve). Az Amerikai Földrajztudósok Szövetségének (AAF – Association of American Geographers) logójában is egy ilyen vetületű térkép szerepel, amelyen a NOAA TIROS műholdak felvételei láthatóak. Ennek a három-ágú változata (nem Berghaus műve) egy szabályos háromszög alakú



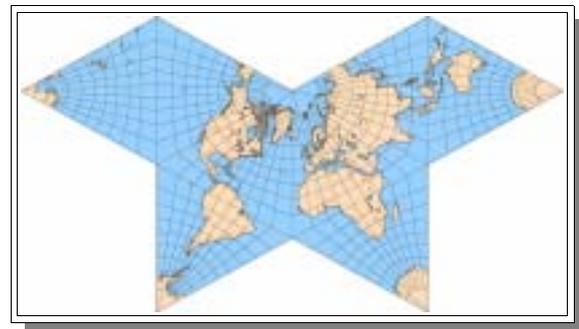
3. ábra: Berghaus csillag-vetületének háromágú változata

Anton Steinhauser (1802-1890) 1883-ban bemutatott vetülete nagyon hasonló Berghaus-éhoz. Az északi félteke itt egy meridiánban hossztartó valódi kúpvetület, a déli féltekét Steinhauser 4 részre vágta szét. Mind a négy középmeridián hossztartó, ezért ha összehajtjuk akkor szabálytalan oktaédert kapunk.



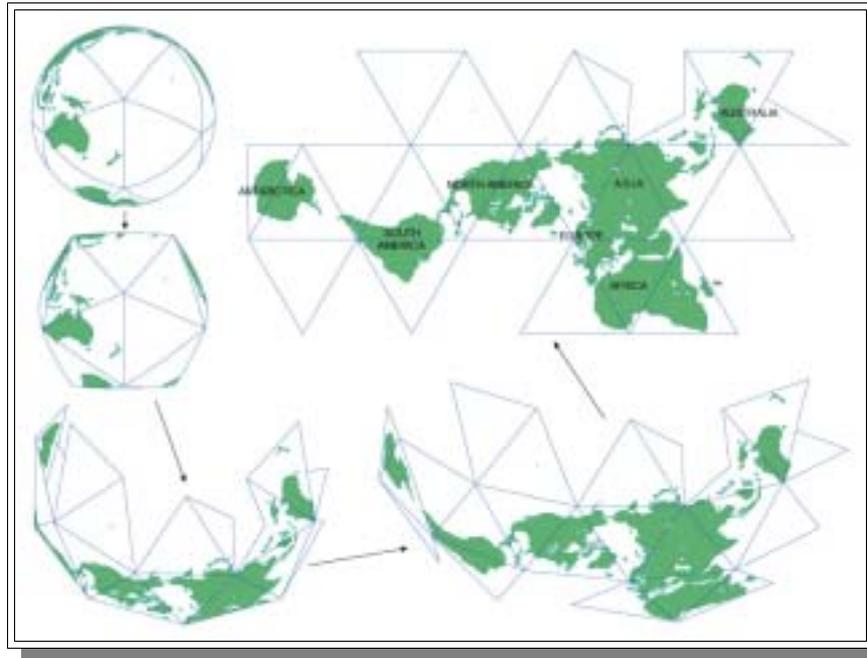
4. ábra: Steinhauser oktaéder-vetülete

1909-től kezdve *Bernard Cahill* számos oktaéder alapú térképet szabadalmaztatott, főleg gnomonikus vagy szög tartó vetületekkel. Mindegyik nyolc darab szabályos háromszögből állt, sokféle módon elrendezve. Ezek közül leghíresebb az ún. Pillangó-térkép, szimmetrikus elrendezésű, az oktaéder minden oldalát az Egyenlítő és két, egymástól 90° -ra lévő meridián határolja. Cahill térképei valójában sosem lettek igazán népszerűek, pedig harminc éven keresztül próbálta népszerűsíteni őket.



5. ábra: Cahill „pillangó” vetülete

A XX. század közepén, *Richard Buckminster Fuller* (1895-1983) - az amerikai mérnök és filozófus, aki építészként megtervezte és az 1967-es montreali világkiállításon felépítette azt a csonka-ikosaéder alapú kupolaszerkezetet, amely később azonosnak bizonyult a fullerén-molekulák szerkezetével - számos ún. Dymaxion térképet készített, felhasználva azokat a matematikai elveket, amelyeken a világhírű kupolái is alapultak. Az első változat egy kuboktaédert használt, amelynek minden éle hossztartó volt (1943), későbbi változatai már ikozaéder alapúak voltak.



6. ábra: Fuller Dymaxion térképe

Ezen térképek célja az volt, hogy a Földet a földtömegek formájának és méretének relatív torzulása nélkül ábrázolja síkban, oly módon, hogy a szárazföldek kontúrjain ne legyenek törések. Ezt a problémát eddig csak földgömbbel tudták megoldani.

Fuller egy ikozaéder-hálót helyezett a Földre, oly módon, hogy a gömbi ikozaéder minden éle egy gömbi főkör íve, tehát a két csúcs között a legrövidebb út. Az így kapott húsz gömbháromszög lefedte az egész Földet. Mivel a 20 gömbháromszög egybevágó, ezért csak azt kell meghatározni, hogy egy adott gömbháromszöget hogyan transzformálunk síkháromszöggé.

Fuller vetületében az élek hossztartóak, a belső pontok helyzetét pedig a csúcsoktól való távolságok alapján kapjuk meg a síkháromszögeken. Ezután már „csak” egy olyan elhelyezést kellett találnia, hogy a kontinensekben ne legyen szakadás.

Mivel nem perspektív vetületről van szó, Fuller inkább transzformációnak nevezte vetület helyett.

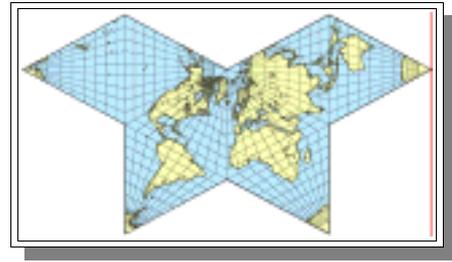
Csúcs	X	Y	Z	Hosszúság	Szélesség
1	0.420	0.078	0.904	+10.5362	+64.7
2	0.995	-0.091	0.040	-5.24539	+2.30082
3	0.518	0.835	0.181	+58.1577	+10.4478
4	-0.414	0.655	0.630	+122.3	+39.1
5	-0.515	-0.381	0.767	-143.4784	+50.1201
6	0.355	-0.843	0.402	-67.13233	+23.7179
7	0.414	-0.655	-0.630	+36.5215	-50.1032
8	0.515	0.381	-0.767	+112.8676	-23.7179
9	-0.355	0.843	-0.402	+174.7546	-2.30088
10	-0.995	0.091	-0.040	-121.8422	-10.4473
11	-0.518	-0.835	-0.181	-57.7	-39.1
12	-0.420	-0.078	-0.904	-169.4638	-64.7

1. táblázat: Fuller ikozaéder-csúcsainak koordinátái

Számos vetületet dolgoztak ki csak a poliéderre való vetítés céljára. 1965-ben Lee bemutatta vetületét szabályos tetraéderhez. Érdekes újdonságnak

tartották meggyőző prezentációjának köszönhetően. Kritikusok szerint „alkalmas lenne egy függöny mintázatának” (Lee 1973). Általában akkor használták, amikor az alakok torzultságának kiküszöbölése volt a cél.

Területtartó vetületek közül kettő terjedt el. Snyder 1992-ben mutatta be Lambert síkvetületének módosított változatát, Irving Fisher korábbi változatából származtatva. Bármely poliéderhez használható, de legkisebb torzulást a 12 oldalú dodekaéder és a 32 oldalú csonka ikozaéder esetén ad. Elmondása szerint a szögtorzulás nem lépi túl a $3,75^\circ$ -ot a csonka ikozaéder esetében.



7. ábra: Clarke-féle pillangó-vetület

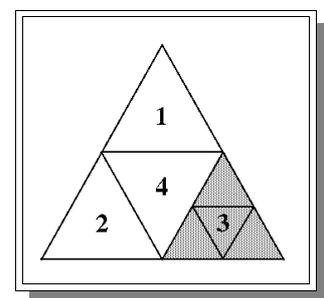
Clarke és Mulcahy (1995) fejlesztették ki az ún. Clarke-féle pillangó-vetületet Dutton QTM rendszere alapján a Collignon-vetületből (1865). A Föld felszínét egy szabályos oktaéder nyolc lapjára képezi le, területtorzulása elhanyagolható, ránézésre emlékeztet Cahill hasonló nevű művére.

Hierarchikus vonatkoztatási módszerek

A poliéderek kartográfiai alkalmazásának újabb területei jelentek meg a közelmúltban. A kartográfia és a földrajzi információs tudományok jelenlegi digitális korszakában, a hatalmas mennyiségű adathalmaz miatt a régi modellek használata már nem kifejezetten előnyös, mivel a kutatók igen nagy területeket is vizsgálnak egyszerre, ahol a torzulások már nem elhanyagolhatóak a hagyományos módszerekkel. Egy ilyen újfajta megközelítés a hierarchikus vonatkoztatási módszerek alkalmazása, melyeknek használata jóval pontosabb és bővebb módszert ad a térbeli reprezentációkhoz, mint a korábban síkban ábrázolt térbeli adatok.

Az ilyen nagy mennyiségű térbeli adathalmaz kezelésére alkalmas módszerek egyike a földfelszín mozaikszerű feldarabolásával kapott hálózati elrendezés.

Dutton publikáció-sorozata (1983-1996) az általa kifejlesztett poliéder-alapú hierarchikus adatszerkezettel foglalkozik elsősorban. Véleménye szerint a hagyományos modellek nem megfelelőek a globális adatok kezeléséhez. A „szegényes dokumentáció” és „változó pontosság, mind vízszintes, mint függőleges irányokban” csak kettő az általa tapasztalt problémák közül.



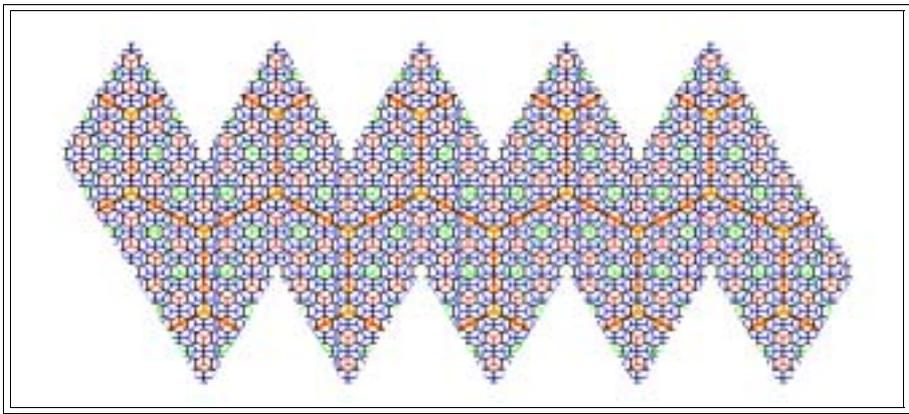
8. ábra: Dutton QTM rendszere

Dutton adatszerkezete Négyes Háromszög Háló (QTM – Quaternary Triangular Mesh) néven ismert, és ő úgy jellemzi tulajdonságait, mint ami „világosan tárolja a magassági adatokat, hatásköre globális, hierarchikus mintavételezést használ, igazolható pontosságú és egy oktaéder felosztásán alapul”. Az eredeti oktaéder minden egyes lapja négy kisebb

háromszögre tagolódik, és ezek az új háromszögek négy még kisebb háromszögre bomlanak stb...

Goodchild és Shiren célja egy hierarchikus adatszerkezet kivitelezése volt adattömörítés és gyors hozzáférés érdekében (1992). Három kritériumot definiáltak egy ilyen adatszerkezet kifejlesztéséhez: minden szinten a celláknak azonos méretűnek kell lenniük; minden szinten azonos alakúaknak kell hogy legyenek; az adatszerkezetnek korrekten kell leírnia a szomszédos cellák kapcsolatát. Rendszerük hasonló volt Duttonéhoz, ők is egy oktaéderből indultak ki, aminek háromszög lapjait kisebb háromszögekre osztották fel ismétlődően. Azonban csak részleges sikereket értek el a három kritériumhoz képest, ugyanis modellük csak közelítően tudja megőrizni a felosztott cellák területét és alakját.

A Snyder-féle ikozaéder alapú hálózatot úgy származtatjuk, hogy egy gömb belsejébe illesztünk egy szabályos ikozaédert oly módon, hogy annak minden csúcsa érinti a gömböt. Ezután minden háromszögből kivágunk egy szabályos hatszöget, úgy, hogy minden oldalát elharmadoljuk. Ha a kapott 20 hatszöget kivetítjük a gömbre, akkor egy ún. „durva felbontású globális hálózat”-ot kapunk, más néven 1-es felbontású hálózat. Ez 20 szabályos hatszögből, és 12 szabályos ötszögből áll. Minden hatszög területe egyenlő, és minden egyes ötszög területe 5/6-a egy hatszög területének.



9. ábra: Snyder-féle ikozaéder hálózat (ISEA)

Egyel jobb felbontású hálózatot a következő módon kapunk: r_i legyen a hatszög oldalának hossza i fokú felbontásnál, ezután mozaikszerűen fedjük le az ikozaéder minden lapját kisebb hatszögekkel, melyek sugara: $r_{i+1} = (2/3) * r_i * \sin 60^\circ$. Az új hálózat egyes poligonjainak középpontjai egybeesnek a régi hálózat poligonjainak középpontjaival, a többi új hatszög középpontja pedig a régi poligonok csúcsai helyére esnek. Az így kapott hatszögek területe 1/3-a az eredeti hatszögeknek.

Lugo 1994-ben Dutton QTM rendszeréből kiindulva megalkotta saját TQS (Triangulated Quadtree Sequencing) nevű szerkezetét. Clarke pillangó vetületét használta sikeresen modellje alátámasztásához.

Ugyancsak egy poliéder alapú változatot fejlesztett ki egy kutatócsoport, teljesen más céllal (1992). Kimerling, Overton és White egy statisztikusan megbízható mintavételezési programot dolgoztak ki globális ökológiai adatokhoz. Kritériumaik a következők voltak: véletlenszerűen elhelyezett mintavételezési rács; területtartó vetület; mintavételezési rács sűrítésnek lehetősége hierarchikus módon. Mintavételezési rács alapjául egy csonka ikozaédert szerkesztettek, vetületük pedig a Lambert-féle területtartó síkvetület volt.

Topográfiai térképek

A topográfiai térképek a többi térképtől általában abban is különböznek vetületi szempontból, hogy a poliéderek oldalai ebben az esetben nem a gömbi főkörök képei, hanem a fokhálózati vonalaké (meridiánoké és paralelköröké).

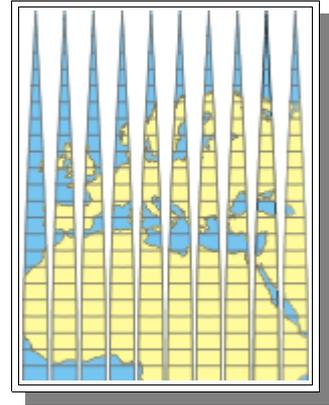
A harmadik katonai felvétel (1869-1887) az úgynevezett Lichtenstern-féle poliédervetületet használta. Meghúzva az ellipszoidon 30 fokpercenként a meridiánokat és 15 percenként a paralelköröket, trapéz-szerű alakzatokat kaptak. Minden ilyen területrészt egy-egy síkon fekvőnek gondoltak, és a sarokpontokat egyenesekkel kötötték össze. Egy ilyen trapézt 1:75 000-es méretarányban ábrázoltak, az ország területét ilyen szelvényekre osztották fel. Az összes szelvény hézagmentesen összeilleszthető, a teljes Földet egy körülbelül 100 méter sugarú (már majdnem gömb alakú) poliéderen ábrázolhatnánk, ha a teljes Földre elkészült volna minden szelvény, ami 518400 szelvényt jelentett volna. Ennek azonban inkább csak elméleti jelentősége van, hiszen egy-egy szelvényt csak önmagában (vagy még tovább osztva) használtak, mint katonai térképet.

A későbbiekben a poliéder szelvénybeosztást megtartva sztereografikus rendszerben készültek a topográfiai térképek. Ennek a megoldásnak különlegessége az volt, hogy mivel sztereografikus vetületen a fokhálózati vonalak képei – és így a poliéder szelvények keretvonalai is – nem közös középpontú körök, ezért elméletileg az egy sorban levő (két paralelkör által határolt) szelvények sem azonos méretűek. A poliéder vetületnél az egy sorban levő szelvények mind azonos méretűek.

A nemzetközi 1 : 1 000 000 méretarányú világtérkép szerkesztéséhez is poliéder rendszerű vetületet vettek alapul az 1909-ben tartott londoni nemzetközi kongresszuson. A felületrészeket (foktrapézokat) határoló paralelköröket 4°-onként, a határoló meridiánokat 6°-onként vették föl. A paralelkörökkel határolt öveket az Egyenlítőtől a sarkok felé A, B, C....Z betűvel jelölték. Az utolsó öv szélessége csak 2°, a 88°-tól a pólusig terjed. A meridiánokkal határolt oszlopokat a kezdőmeridiántól keletre és nyugatra is 1-től kezdve számozással jelölték. Összesen 60 oszlopot kapunk ily módon. Az egyes lapokra az egyszerű amerikai polikonikus vetületet alkalmazták kisebb módosításokkal. A trapézokat határoló paralelkörök hossztartóak, a meridiánok képei, egy felületrészen belül, egyenesek. A középmeridiántól 2°-ra levő meridiánok a hossztartóak, ennek megfelelően sem a középmeridián, sem a határoló meridiánok nem

hossztartóak. A szelvényeket övenként vagy oszloponként megszakítás nélkül lehet összeilleszteni, azonban az összes szelvény összeillesztése egy összefüggő, megszakítás-mentes felületté nem lehetséges.

Maga a rendszer nagyon hasonlít a későbbiekben jól ismert Gauss-Krüger és UTM vetületi rendszerekre is. Míg a Gauss-Krüger vetületi rendszerben a felosztás ugyanígy 4 és 6 fokoként történik, az UTM rendszerben 8 fokos a paralelkörök beosztása. A Gauss-Krüger esetén érintő, UTM esetén pedig metsző szögtartó transzverzális hengervetületet használunk a poligonok leképezéséhez. Az összes szelvény egyik esetben sem illeszthető össze egy teljes poliéderré itt sem.



10. ábra: Az egymilliósvilágtérképű szelvényezése

ALKALMAZOTT VETÜLETEK

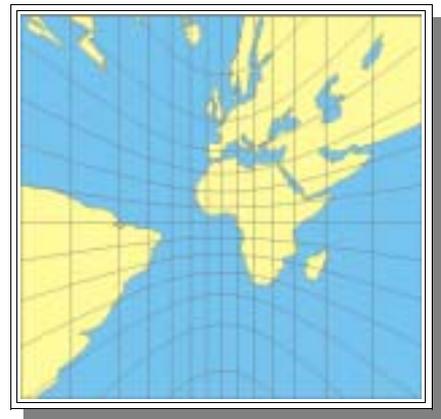
Gnomonikus vetület

A gnomonikus leképezés egy perspektív leképezés, alapelve rendkívül egyszerű: vetítési középpont a gömb középpontja, a képsík pedig egy a gömböt a pólusban érintő, vagy ezzel párhuzamos sík. A vetületi egyenleteit a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned}q &= \tan(90^\circ - \varphi) \\x &= q \cdot \cos(\lambda) \\y &= q \cdot \sin(\lambda).\end{aligned}$$

Kinézetre és matematikai számításokkal mérve is látszik, hogy a szög-, de még inkább a területtorzulás mértéke rendkívüli mértékben nő a középponttól távolodván. A paralelkör menti hossztorzulás: $h = 1 / \cos \beta$ a meridián menti hossztorzulás pedig: $k = 1 / \cos \beta$. Ezekből megkapjuk a területtorzulást és a maximális szögtorzulást:

$$\tau = hk = \frac{1}{\cos^3 \beta}$$
$$\sin \Delta_{\max} = \frac{k - h}{k + h} = \tan^2 \frac{\beta}{2}.$$



11. ábra: A gnomonikus vetület

A hatalmas torzulások ellenére van egy rendkívül hasznos tulajdonsága: a gömbi főkörök képei mindig egyenesek lesznek. Ebből következik hogy ezzel a vetülettel meglehetősen egyszerű módot találtunk bármilyen (konvex) poliéder felszínére történő leképezéshez.

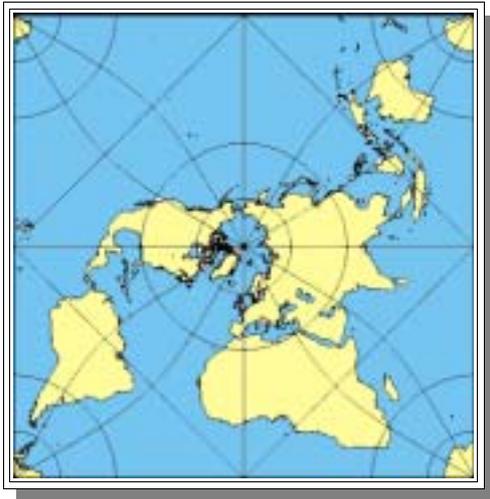
Általában elmondható, így a gnomonikus poliédereknél is, hogy minél több lapja van a poliédernek, annál jobban közelíti a Földgömb alakját. Ennek megfelelően a torzulások legszélsőségesebb értékei egyre kevésbé térnek el az ideális 1 értéktől. Nem szükséges, hogy a térbeli alakzat minden oldallapja egybevágó legyen, ugyanis ez vetülettanilag nem okoz gondot, így nemcsak az ötféle szabályos (Platon-féle) poliéderre lehet alkalmazni, hanem a félig szabályos (Arkhimédész-féle) poliéderekre és a szabálytalanokra is.

Szögtartó vetületek

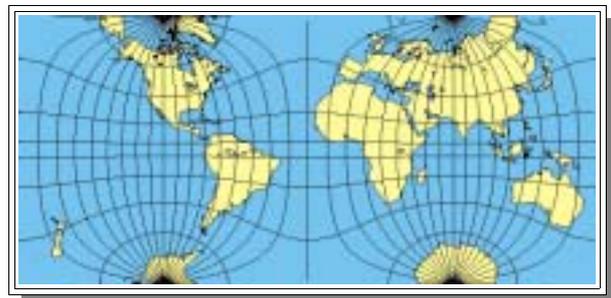
A szögtartó poliédervetületek alapja *Karl Herman Amandus Schwarz* (1843-1921) 1864-es tanulmánya, amelyben megállapítja hogy egy kör belseje szögtartó módon leképezhető bármely szabályos sokszög belsejére. Elmélete a konform leképezések Riemantól származó alaptételén alapul, amely kimondja hogyha adott a síkon a D1

egyszeresen összefüggő tartomány, amely nem az egész sík, akkor létezik olyan konform leképezés, amely D_1 -et kölcsönösen egyértelműen átviszi az egységkör belsejére. Ezen tételt is csak Schwarz munkájával nyert elfogadható bizonyítást, miután az általános összefüggő tartományt sokszögekkel közelítette.

Nyolc évvel később 1872-ben pedig már a gömb felszínét szabályos poliéderekre leképező szögtartó leképezéseket alkotott. Ezen formulákat először *Charles Sanders Peirce* (1839-1914) alkalmazta a kartográfiában 1879-ben, midőn a félgömböt négyzetre vetítette szögtartó módon. Ennek transzverzális változatát 1887-ben írta le *Emile Guyou*.

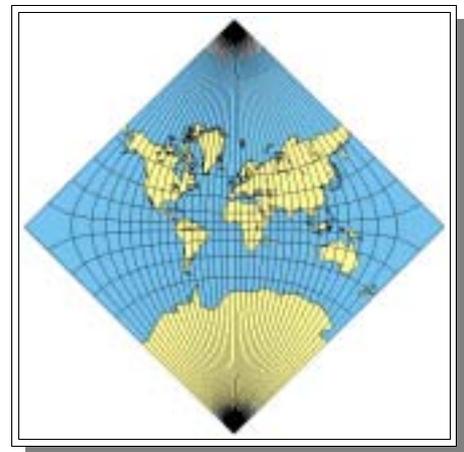


12. ábra: Pierce szögtartó vetülete



13. ábra: Guyou szögtartó vetülete

1925-ös művét *Oscar S. Adams* *Elliptic Functions Applied to Conformal World Maps* címmel publikálta, melyben megállapítja hogy Schwarz előbbi integrálja $n=3$ esetén Dixon elliptikus függvényeivel azonosak. Publikációjának második felében ezen függvényeken alapuló szögtartó vetületeket is bemutat. A következő években a vetület még számos változata kerül megalkotásra, többek között 1929-ben Adams a teljes gömböt ábrázolja négyzet alakban, 1936-ban ugyanő ennek egy másik változatát, ahol a pólusok a négyzet két szemközti oldalának közepén vannak, 1935-ben J. F. Cox egyenlőoldalú háromszög alakban ábrázolja a teljes földet, természetesen mindegyik szögtartó módon.



14. ábra: Adams szögtartó négyzet-vetülete

Schwarz szerint az egység sugarú kör (z) belseje konform módon leképezhető egy szabályos, n oldalú sokszög (w) belsejére a következő

$$\text{integrál segítségével: } w = \int_0^z (1 - z^n)^{-2/n} dz .$$

Ez Adams szerint $n=3$ esetén a következő formában írható: $smw = z$, ahol sm a Dixon-féle elliptikus függvény. Ebben az esetben tehát egy kör belsejét szögtartóan képezzük le egy szabályos háromszögre. A következő szögtartó vetületeknél ezeket a Dixon-féle elliptikus függvényeket használhatjuk matematikai leíráshoz.

SZABÁLYOS POLIÉDEREK

Poliédernek nevezünk egy testet, ha síkok határolják. A szabályos poliédereket, más néven Platon-féle testeket az jellemzi, hogy határoló lapjaik egybevágó szabályos sokszögek, csúcsaik pedig egybevágó szabályos csúcsok.

Lapok	Élek	Csúcsok	Név
4	6	4	Tetraéder
6	12	8	Kocka
8	12	6	Oktaéder
12	30	20	Dodekaéder
20	30	12	Ikozaéder

2. táblázat: A szabályos poliéderek adatai

Hexaéder (kocka)

Egy origó középpontú, normális elrendezésű (lapjai párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel) kocka csúcsainak derékszögű koordinátái:

A (1 1 -1)

B (1 1 1)

C (-1 1 1)

D (-1 1 -1)

E (1 -1 -1)

F (1 -1 1)

G (-1 -1 1)

H (-1 -1 -1)

Ezekből pedig felhasználva a gömbi polárkoordináták, és a derékszögű koordináták közötti

$$\tan \lambda = \frac{z}{x} \quad \text{és} \quad \tan \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

összefüggéseket, kapjuk a kocka csúcsainak gömbfelületre vetített földrajzi koordinátáit normális elhelyezés esetén (egyik lap középpontja a pólusban):

A ($\lambda = 35,2643^\circ$ $\varphi = -45^\circ$)

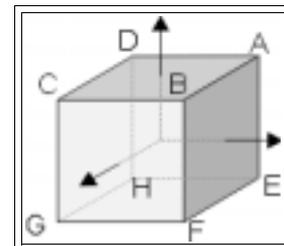
B ($\lambda = 35,2643^\circ$ $\varphi = 45^\circ$)

C ($\lambda = 35,2643^\circ$ $\varphi = 135^\circ$)

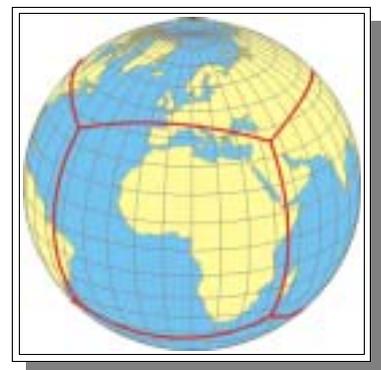
D ($\lambda = 35,2643^\circ$ $\varphi = -135^\circ$)

A maradék négy csúcs hasonlóan, $\lambda = -35,26^\circ$ szélességgel (φ pontos értékei: $\pm \arctan(1/\sqrt{2})$).

Tehát a csúcsok távolsága a megfelelő lap középpontjától (segéd-pólustávolság, ρ):



15. ábra: Kocka



16. ábra: Kocka vetülete a földgömbön, normális elhelyezés

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan \sqrt{2} .$$

Az oldalkoszinusz-tételből pedig kapjuk egy oldal hosszát (a):

$$\cos a = \cos^2 \arctan \sqrt{2} + \sin^2 \arctan \sqrt{2} * \cos \frac{\pi}{2} , \text{ vagyis } a = \arccos \frac{1}{3} .$$

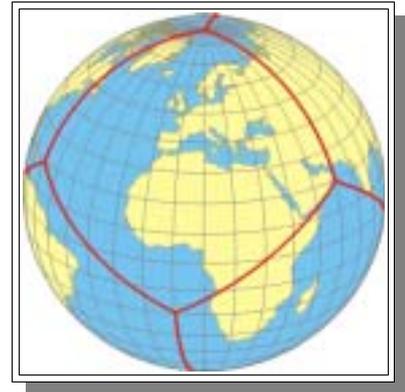
Az oldalak felezőpontjának távolsága a középponttól, azaz a középpontok élektől való távolsága pedig a szimmetria miatt $2\pi/8 = \pi/4$.

Egy másik lehetséges elhelyezés, hogy a kocka egyik csúcsa (A) van a pólusban, természetesen ebben az esetben a szemközti csúcs van az ellentétes pólusban. Az A csúccsal szomszédos csúcsok pólustávolságát megkapjuk az oldalhosszúságból:

$$\beta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5287^\circ ,$$

tehát a szélesség:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3} = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,47122^\circ .$$



17. ábra: Kocka vetülete a földgömbön, transzverz elhelyezés

A szimmetria miatt a másik 3 középső csúcs koordinátáinak szélessége megegyezik ennek az értéknek a negatívjával. Mivel egy csúcsnak három szomszédos csúcsa van, ezért az A csúccsal szomszédos három csúcs földrajzi hosszúsága a szimmetria miatt 120°-onként következik, ugyanígy a maradék három csúcs is. Tehát ha kikötjük, hogy a kezdőmeridián az egyik lap közepén húzódjon, akkor a 8 csúcs koordinátái:

- A ($\lambda=90^\circ$)
- B ($\lambda=19,47122^\circ$ $\varphi=60^\circ$)
- C ($\lambda=-19,47122^\circ$ $\varphi=0^\circ$)
- D ($\lambda=19,47122^\circ$ $\varphi=-60^\circ$)
- E ($\lambda=-19,47122^\circ$ $\varphi=-120^\circ$)
- F ($\lambda=19,47122^\circ$ $\varphi=180^\circ$)
- G ($\lambda=-19,47122^\circ$ $\varphi=120^\circ$)
- H ($\lambda=-90^\circ$)

A szélességek pontos értékei: $\varphi = \pm \arcsin 1/3$.

A lapok középpontjainak koordinátái ekkor értelemszerűen a csúcsok távolságával egyenlők, azaz $\beta = \arctan \sqrt{2}$, tehát az „északi” három lap középpontjának koordinátái

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35,26439^\circ ,$$

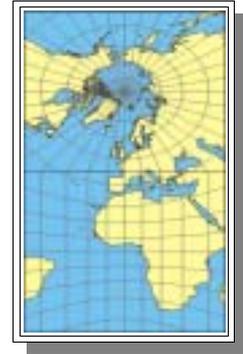
a „délié” pedig ennek az ellentettje, a hosszúságok itt is a két csoportból felváltva 60°-onként következnek.

Gnomonikus hexaéder

A kocka esetén a maximális (segéd)pólustávolság (más szóval a csúcsok gömbi távolsága a vetítési középponttól):

$$\beta_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,7356^\circ .$$

Ezt az eredményt behelyettesítve a fenti képletekbe kapjuk itt is a területtorzulást és a maximális szögtorzulást: $\tau = \sqrt{27}$ és $\Delta_{\max} \approx 15,5422^\circ$. A 18. ábrán normális elhelyezésű kocka vetület két lapját láthatjuk, az egyik normál gnomonikus vetület, a másik pedig transzverzális gnomonikus vetület.



18. ábra:
Gnomonikus
kockavetület

Területtartó kockavetület (módosított Lambert-féle síkvetület)

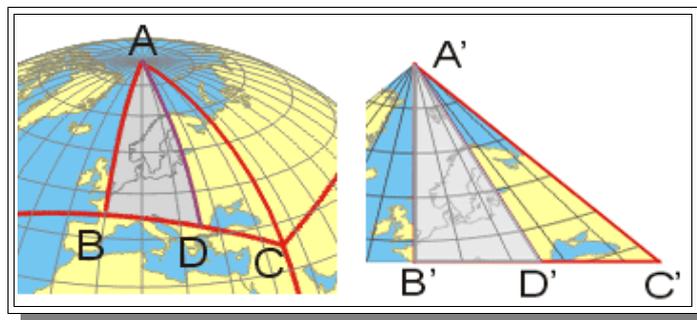
A szimmetria okán ki kell kötnünk, hogy a kocka nyolc csúcspontja ugyanott van, mint a gnomonikus vetületnél. A területegyenlőség megkívánja, hogy a kocka lapjainak oldalának hossza $2 * \sqrt{\pi/6}$, hiszen ekkor a 6 oldal területe éppen 4π .

Nevezzük el az alábbi pontok megfelelőjét a gömbön, illetve a képsíkon rendre $A, A'; B, B'; C, C'$ -vel:

A ($\lambda = 0$; $\varphi = 90$;) a négyzet középpontja

B ($\lambda = 0$; $\varphi = 45$;) a négyzet egyik oldalának felezőpontja

C ($\lambda = 45$; $\varphi = 35,2644$;) a négyzet egyik csúcsa



19. ábra: Az ABC gömbháromszög leképezése síkba

A BC szakaszon haladva továbbra is tartjuk fenn a területegyenlőséget: tetszőleges BC ortodrómán levő D pontra legyen a BAD szög λ . Ekkor a gömbháromszögtani szögekösztételből következően a BDA szög

$$\arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \lambda \right) .$$

Az ismert területszámítás alapján a gömbi háromszög területe a háromszög három belső szögének (radiánban számolt) összegénél π -vel

kevesebb. Másrészt viszont a képsíkon az A'D'B' háromszög területe (a B'A'D' szöget λ' -nek elnevezve)

$$T = \frac{\pi}{6} \frac{\tan \lambda'}{2}.$$

Ebből a területegyenlőséget kihasználva:

$$\lambda' = \arctan \left[\left(\arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \lambda \right) + \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \frac{12}{\pi} \right].$$

Ezzel a módszerrel a központból induló meridiánok által bezárt szögeket átszámoltuk. A Lambert-féle síkvetületben adott λ -re kiszámolható a q sugárfüggvényből következő hossz, melynél a meridiánok mentén (s így mindenütt) a területtorzulás értéke 1. Az így kapott hosszat ezek után meg kell nyújtani (össze kell nyomni) a képsíkon levő A'D' hosszra:

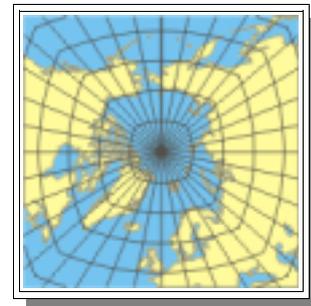
$$A'D' = \sqrt{\frac{\pi}{6} \frac{1}{\cos \lambda'}}$$

Az AD szakasz hossza az eredeti gömbháromszögon kiszámolható:

$$\cos \lambda = \operatorname{ctg} AD * \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}, \text{ ahonnan } AD = \arctan \frac{1}{\cos \lambda}.$$

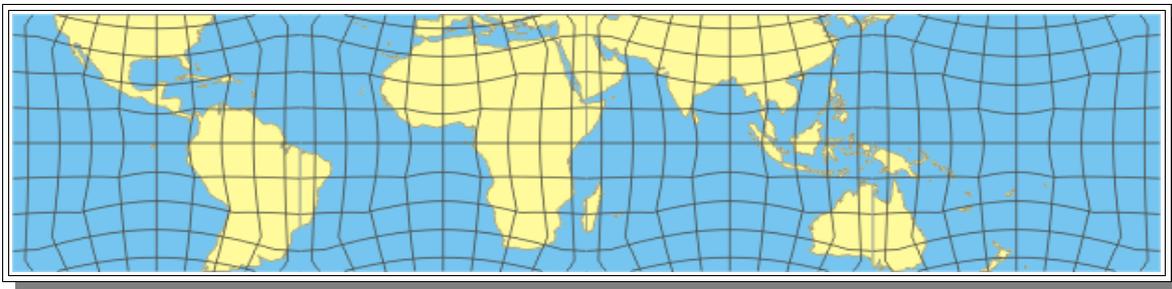
Majd bevezethetjük a q' sugárfüggvényt:

$$q' = \frac{A'D'}{2 \sin \frac{AD}{2}} 2 \sin \frac{\beta}{2}.$$



20. ábra: Területtartó kockavetület

Ezek után pedig már bármely pont koordinátáját könnyen megkaphatjuk az ABC háromszögben. A képsík hat kockalapján 8-8 ilyen háromszög van, de a központi szimmetriát (nem középpontos) felhasználva a 45° és 360° közé eső hosszúságokat is könnyen elhelyezhetjük. $x = q' \cos(\lambda')$, $y = q' \sin(\lambda')$. Ahogy a 20. és 21. ábrán is látszik, az egyes lapokon belül törések keletkeznek a háromszögeket elválasztó vonalak mentén.

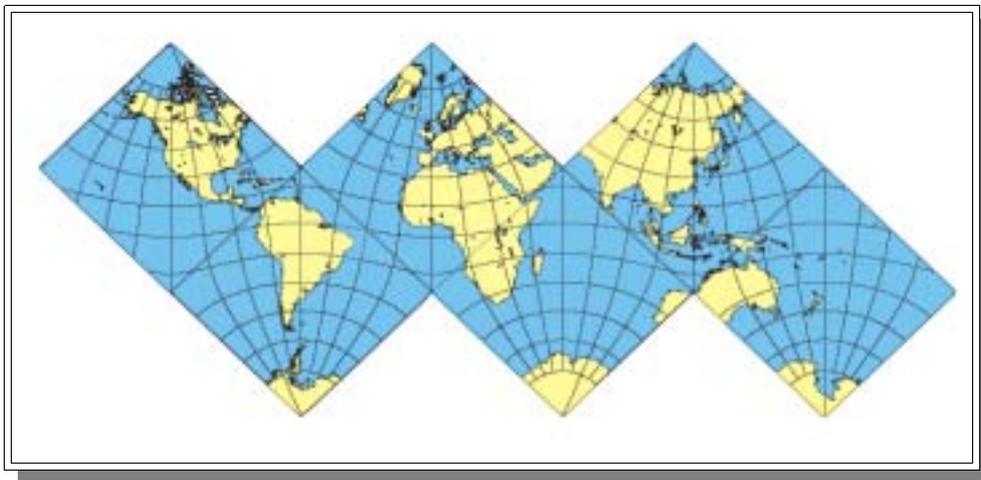


21. ábra: A területtartó kockavetület egyenlítői (transzverzális) lapjai

Szögtartó kocka vetület

A gömb felületének egy hatod része, mely egy kocka egy lapjának felel meg, nem más mint egy gömbnégyszög, amelyet átlói négy kisebb gömbháromszögre osztanak, melyeknek szögei: $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/3$. Ezen kis gömbháromszögek sztereografikus vetülete konform módon képezhető le a teljes félsíkra. A félsíkot először negyed síkra vetítjük, majd a négy darab negyedsíkból álló teljes síkot egy kör belsejébe vetítjük, amely viszont egy négyzetté transzformálható a Jacobi-féle elliptikus függvények segítségével.

Direkt elrendezés esetén a két pólus két szemközti lap középpontjában van, a maradék négy oldal középvonala pedig az egyenlítő. A pólusokat tartalmazó lapokat a normál sztereografikus vetületből származtatjuk, a másik négyet pedig a transzverzális sztereografikusból, 45° -kal elforgatva.



22. ábra: Szögtartó kockavetület

Létezik olyan elhelyezés is, hogy mindegyik lapon a fokhálózat képe hasonló. Ebben az esetben mindegyik lap egyik csúcsa valamelyik pólusra esik. Mindegyik lapot a ferde sztereografikus vetületből származtatjuk, a kezdőpont szélessége pedig a $\tan \varphi_0 = \pm 1/\sqrt{2}$ képlet alapján számítható.

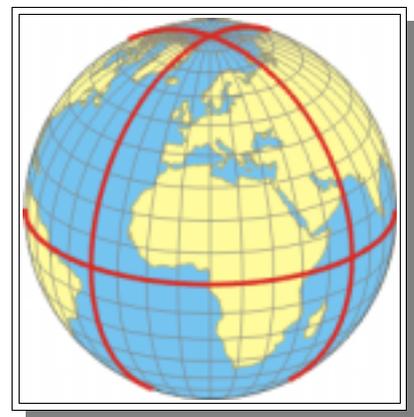
OKTAÉDER

Vetülettani szempontból a legszabályosabb poliéder, hiszen normális elhelyezés esetén (egyik csúcsa a pólusban van) élei gömbi főkörök és fokhálózati vonalak is egyben. Éppen ezért jelen keretek között csak ezzel az egy elrendezéssel foglalkozunk.

Tehát normális elhelyezéssel a csúcsok földrajzi koordinátái:

A ($\lambda=90^\circ$, $\varphi=0^\circ$)

B ($\lambda=0^\circ$, $\varphi=0^\circ$)



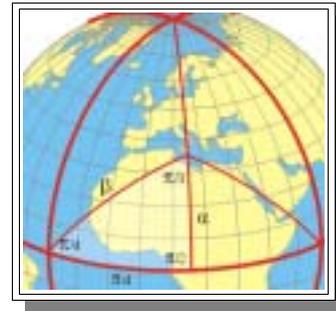
23. ábra Oktaéder vetülete a földgömbön

- C ($\alpha=0^\circ, \beta=90^\circ$)
- D ($\alpha=0^\circ, \beta=-90^\circ$)
- E ($\alpha=0^\circ, \beta=180^\circ$)
- F ($\alpha=-90^\circ, \beta=0^\circ$).

(a 23. ábrán az elrendezés 30° -kal nyugatra elforgatva látható)

Tehát 1-1 csúcson a két póluson van, a többi pedig egyenletesen szétszórva 90° -onként az Egyenlítőn. Így a nyolc élből négy darab az Egyenlítő képe, a másik négy pedig két, egymással 90° -ot bezáró meridiáné. Az alapfelületen a gömbháromszögek minden oldala és szöge is $\pi/2$ nagyságú, valamint minden meridián is (egy háromszögon belül) ilyen hosszúságú.

Az egyes lapokon belül a csúcsok és az oldalfelezők középponttól való távolságait úgy kapjuk, ha felírjuk az első Napier szabályt az eredeti háromszög egy kisebb részére, amit az középpontból az egyik csúcshoz és a szomszédos oldalfelezőhöz húzott főkör határol. A kapott kis háromszög derékszögű, a másik két szöge pedig $\pi/4$ és $\pi/3$ nagyságú. Tehát a Napier szabály alapján:



24. ábra: A gömbi oktaéder lapjának feldarabolása

$$\cos \beta = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ innen a csúcsok távolsága: } \beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Az ismeretlen befogóra (α):

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

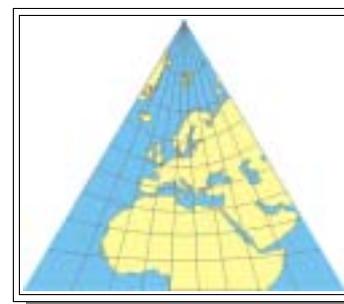
tehát az oldalfelezők távolsága (α):

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}},$$

így valóban a két távolság összege $\pi/2$, azaz a teljes (fél)meridián hossza.

Gnomonikus oktaéder

Az oktaéder esetén is a gnomonikus vetület a leképezés talán legegyszerűbb módja. És mivel az egyes lapokon belül a középpont távolsága a csúcsoktól (tehát a maximális segéd-pólustávolság) megegyezik a kockánál számoltakkal, ezért a gnomonikus oktaéder esetén a maximális szög-, és területtorzulás is ugyanannyi mint a kocka esetén.

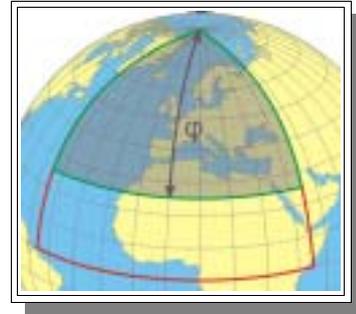


25. ábra: A 24. ábrán látható gömbháromszög gnomonikus leképezése

Területtartó oktaéder vetület párhuzamos paralelkörökkel (Módosított Collignon-vetület)

A terület egyenlőség megkívánja, hogy az oktaéder lapjainak oldalának hossza $\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}$ mivel így a 8 oldallap területe éppen 4π .

Tekintsük a gömbön egy laphoz tartozó gömbháromszöget, egyszerűség kedvéért ennek csúcspontjai legyenek az északi pólus valamint a $\lambda=45^\circ$ és a $\lambda=-45^\circ$ hosszúságú pontok az Egyenlítőn. Ekkor a φ szélességhez tartozó paralelkör és a két határoló meridián által meghatározott gömbfelületi idom felszínének nagysága (negyed gömbsüveg felszíne): $F = (\pi/2) * (1 - \sin \varphi)$. Az ehhez a gömbháromszöghöz tartozó síkháromszögben (az oktaéder megfelelő lapja) tekintsük az eredetihez hasonló, olyan háromszöget, melyeknek alapja az eredeti alapjával párhuzamos, a másik két oldala pedig egy egyenesen van az eredetiével. Egy ilyen háromszög területe $T = yx$ ahol y a háromszög magassága, x az alapjának a fele. Mivel szabályos háromszögről van szó, ezért



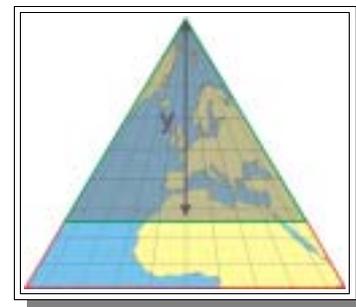
26. ábra: Negyedgömbfüveg a gömbi oktaéderen

$$x = \frac{y}{\sqrt{3}}, \text{ tehát a terület } T = y^2 \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A két területet egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{3} \pi}{2} (1 - \sin \varphi)}.$$

A területtartóság miatt x -et úgy kell megválasztanunk, hogy a paralelkörök egyenközűek legyenek, tehát mivel a $\lambda=45^\circ$ meridián képe éppen a háromszög egyik határoló oldala, ezért



27. ábra: A negyedgömbfüveg megfelelője síkban

$$x = \frac{4}{\pi} \lambda \cdot y.$$

Ha kezdő tengelynek a háromszög alapját, azaz az egyenlítőt akarjuk tenni, akkor az y -t kell vonjuk a háromszög magasságából. Tehát a végeredmény:

$$x = \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{3} \pi}{2} (1 - \sin \varphi)} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{\frac{\pi \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3} \pi}{2} (1 - \sin \varphi)}.$$

Területtartó oktaéder vetület (módosított Lambert)

A kockánál bevezetett képletek a következőképpen módosulnak:
Mivel a gömbháromszögek minden szöge és oldala derékszög, ezért az átszámozott hosszúság a területegyenlőség alapján:

$$\lambda' = \arctan \frac{4\lambda}{\sqrt{3}\pi}.$$

Az $A'D'$ képfelületi hossz marad

$$A'D' = \frac{m}{\cos \lambda'}, \text{ ahol } m \text{ a háromszög magassága: } m = \sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}},$$

az alapfelületi AD meridiánhossz értelemszerűen $AD = \pi/2$, ezeket összegezve a sugárfüggvény:

$$q' = \frac{A'D'}{2 \sin \frac{AD}{2}} 2 \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{\sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\cos \arctan \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{3}}}}{\sqrt{2}} * 2 \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}{\cos \arctan \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{3}}} * \sin \frac{\beta}{2}.$$

Ebből x -t és y -t kapjuk:

$$x = \frac{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}{\cos \arctan \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{3}}} * \sin \frac{\beta}{2} * \sin \lambda' \quad \text{és} \quad y = \frac{\sqrt{\pi\sqrt{3}} * \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \arctan \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{3}}} \cos \lambda'.$$

Ezekbe \square -t behelyettesítve, és tovább egyszerűsítve kapjuk

$$x = \sqrt{\pi\sqrt{3}} * \sin \frac{\beta}{2} * \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{\pi\sqrt{3}} * \sin \frac{\beta}{2} \cdot A$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

azonosságokat felhasználva az

$$x = \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{2}} \sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{1 - \sin \varphi} \sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$$

egyenletekhez jutunk, ami pedig nem más, mint az előző, Collignon-féle vetület, csak az y tengely mentén el van tolva a kezdőpont, és a tengely iránya is ellenkező. Tehát a két módszerrel ugyanazt a vetületet kaptuk. Vetületi tulajdonságai: mivel képzetes hengervetületről van szó, ezért a meridián és paralelkör menti hossztorzulásokat a

$$k = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{és} \quad h = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right| \frac{1}{\cos \varphi}$$

képletekből kapjuk. Ezekbe behelyettesítjük a fenti egyenleteket, és kapjuk hogy:

$$h = \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi}}{\cos \varphi} \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\pi \sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi}}{\cos \varphi} * 2 * \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{3}}} \quad \text{és}$$

$$k = \sqrt{\frac{\pi \sqrt{3}}{2}} * \frac{1}{2} * \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin \varphi}} * \frac{1}{\sin \theta} ,$$

ezekből pedig ránézésre is látszik, hogy a területtorzulás $\tau = h * k * \sin \theta = 1$, tehát valóban területtartó vetületet kaptunk.

Írjuk fel a φ szélességen adott $\Delta\lambda$ -hoz tartozó paralelkör-szakasz alapfelületi és képfelületi hosszát: a gömbön $s = \Delta\lambda \cos \varphi$, a képfelületen pedig

$$s' = \frac{4\Delta\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \sin \varphi} \sqrt{\frac{\pi \sqrt{3}}{6}} .$$

A két hosszt egyenlővé téve kapjuk:

$$\cos \varphi = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \sin \varphi} \sqrt{\frac{\pi \sqrt{3}}{6}} .$$

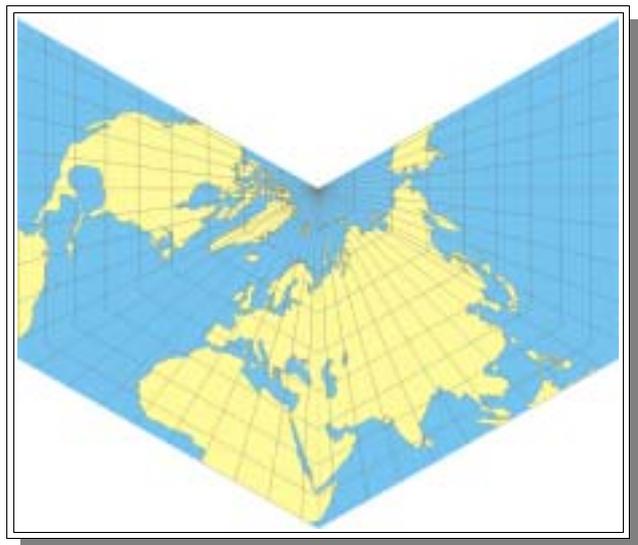
Négyzetre emelve és átrendezve

$$1 - \sin^2 \varphi = (1 - \sin \varphi) \frac{8}{\pi \sqrt{3}} ,$$

$$\text{ebből} \quad 1 + \sin \varphi = \frac{8}{\pi \sqrt{3}} , \quad \text{tehát}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{8}{\pi \sqrt{3}} - 1 .$$

Ez a szélességi kör tehát hossztartó, mivel az összes paralelkör ekvidisztáns.



28. ábra: Területtartó oktaéder vetület (északi félgömb)

Oktaéder vetület ekvidisztáns meridiánokkal, konstans sugárhajlással, hossztartó egyenlítővel és határolómeridiánokkal

Egy-egy háromszög oldalai a definíció miatt $\pi/2$ hosszúságúak. A gömbi oktaéderben a háromszög szögei is $\pi/2$ -vel egyenlőek, a sík oktaéderben viszont, mivel szabályos oktaéderről van szó, a szögek 60° -osak. Tehát a sugárhajlás

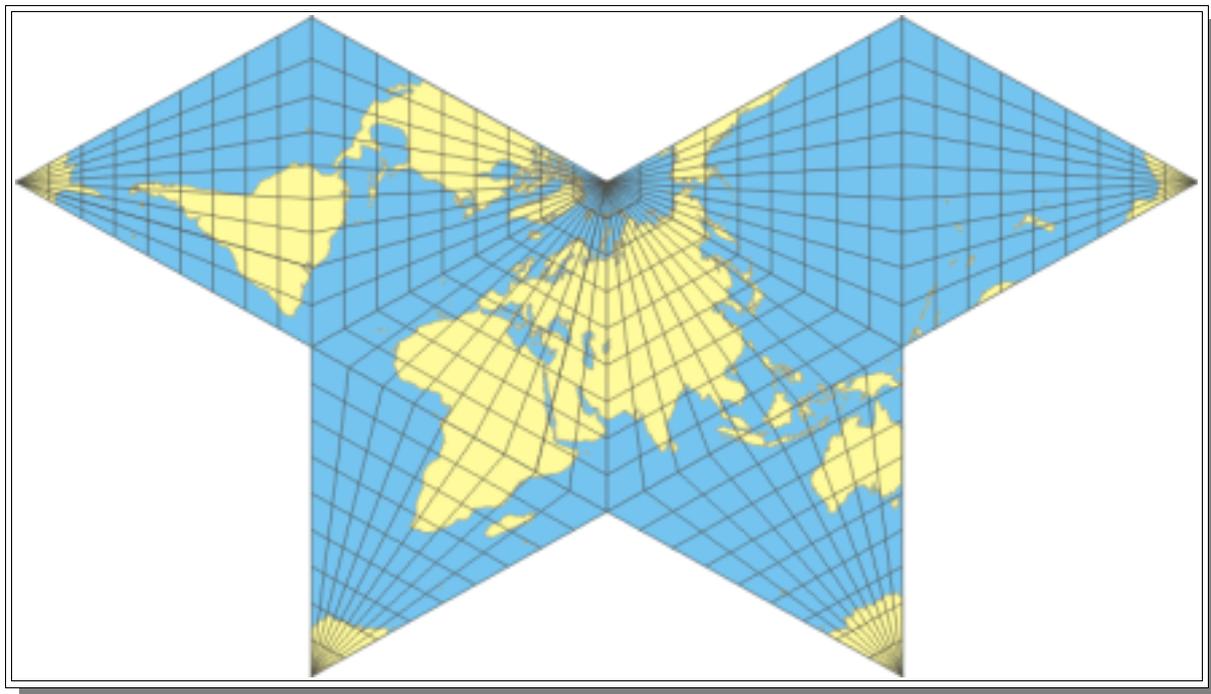
$$n = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Egy háromszög magassága: $m = \pi \sqrt{3}/4$, ebből kapjuk a képfelületi meridiánok hosszát:

$$l = \frac{\pi \frac{\sqrt{3}}{4}}{\cos \frac{2}{3} \lambda}.$$

Innen már csak a λ szerint kell ekvidisztánssá tenni, ezután kapjuk a sugárfüggvényt:

$$q' = l \frac{\pi/2 - \varphi}{\pi/2}.$$



29. ábra: Oktaéder-vetület ekvidisztáns meridiánokkal, konstans sugárhajlással, hossztartó egyenlítővel és határolómeridiánokkal

Szögtartó oktaéder

A gömb azon része amely egy szabályos oktaéder egy lapjához tartozik, egy derékszögű gömbháromszög, melynek minden szöge és minden oldala is derékszög. Ez a gömbháromszög hat darab kisebb gömbháromszögre bontható, melyeknek szögei $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$. Ezeket egyenként szögtartó módon leképezhetjük a teljes félsíkra, majd a teljes félsíkokat egy $\pi/3$ szögű körcikkbe, így módon összeáll a hat darab körcikkből a teljes kör, amelyet a Schwarz integrál segítségével képezhetjük le egy szabályos háromszögre, amelyből oktaéderünk felépül.

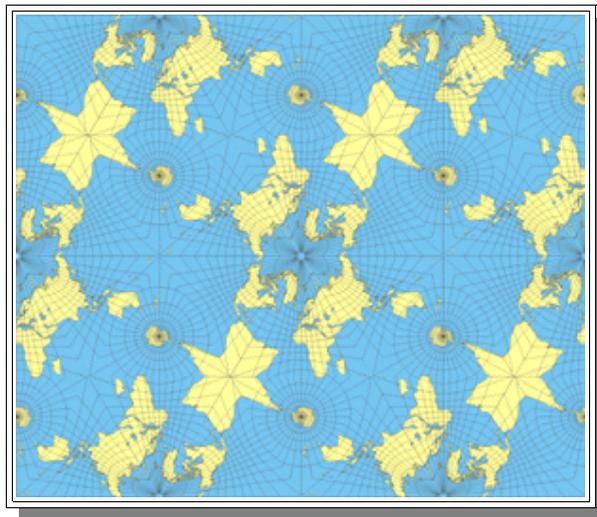
TETRAÉDER

A tetraéder geometriai tulajdonságai következtében az egész test kihajtható egy nagyobb szabályos háromszögbe, tehát az egész Földet egy szabályos háromszög kontúrban jeleníthetjük meg.

Ideális elhelyezés lehet például, ha az északi pólus az egyik csúcsonál van, a maradék három pedig a déli szélesség $\arcsin(1/3)$ -nál, a hosszúságuk pedig 20° Ny, 100° K és 140° Ny. Így módon a szárazföldek elegendő távolságra vannak a szinguláris pontoktól ahhoz, hogy nagyarányú torzulás ne lépjen fel.

Ha az egyik lapot a középvonalánál levágjuk, elrendezhetjük oly módon a kapott részeket, hogy a teljes gömb téglalap alakot vesz föl, oldalainak aránya $\sqrt{3}/4$.

A poliéderek közül egyedül a tetraédernek van meg az a tulajdonsága, hogy ha lapjait kihajtjuk, akkor mivel szabályos háromszöget kapunk, tehát egy végtelen mozaik-elrendezésben a teljes síkot lefedhetjük vele, megszakítások nélkül.



30. ábra: Transzverz tetraéder-mozaik

Thomas Wray azt az elrendezést ajánlja normál elrendezésnek, amikor mindkét pólus egy-egy él középpontján van. Ebben az esetben mind a négy lapon azonos a fokhálózat rajza. A tetraéder tulajdonságaiból adódik, hogy a szemben lévő élek középpontjait összekötő szakaszok egy

perpendikuláris triádot alkotnak, tehát páronként merőlegesek egymásra. Ebből a két pólust összekötő vonal definiálja ezek szerint a normál vagy direkt elhelyezést, a másik kettő pedig az első és második transzverzális elrendezést.

Normál (direkt) elrendezés

Induljunk ki a normális elhelyezésű kockából. Ennek két szemközti lapján lévő 2-2 ellentétes csúcs egy szabályos tetraédert határoz meg. Tehát a kocka nyolc csúcsából a négy kiválasztott:

$$A (1 \ -1 \ -1)$$

$$B (-1 \ -1 \ 1)$$

$$C (-1 \ 1 \ -1)$$

$$D (1 \ 1 \ 1)$$

Ezekből pedig ismét felhasználva a gömbi polárkoordináták, és a derékszögű koordináták közötti $\tan \lambda = z/x$ és $\tan \varphi = y/\sqrt{x^2 + z^2}$ összefüggéseket, kapjuk a tetraéder csúcsainak gömbfelületre vetített földrajzi koordinátáit direkt elhelyezés esetén:

$$A (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = -45^\circ)$$

$$B (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = 135^\circ)$$

$$C (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = 45^\circ)$$

$$D (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = -135^\circ)$$

Az elrendezésből adódik, hogy a két pólus a két megfelelő él felezőpontján van. Forgassuk még el a kapott pontokat, oly módon, hogy a kezdőmeridián képe az egyik lap középvonalán húzódjon, ekkor a kapott koordináták:

$$A (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = 0^\circ)$$

$$B (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = 180^\circ)$$

$$C (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = 90^\circ)$$

$$D (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = -90^\circ)$$

Ekkor a lapok középpontjainak pólustávolsága $\beta = \alpha = \arcsin \sqrt{2/3}$, tehát $\varphi = \pi/2 - \beta = \arccos \sqrt{2/3}$, a másik két lapra pedig a szimmetria miatt $\varphi = -\arccos \sqrt{2/3}$. És mivel a középmeridián az ADC lap közepén húzódik, ezért ennek a lapnak a középpontja is rajta van a kezdőmeridiánon, és a szimmetriából következik, hogy a földrajzi hosszúságok 90° -onként következnek, tehát a lapok középpontjainak koordinátái:

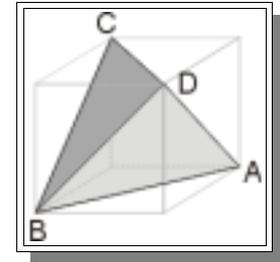
$$ADC: (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = 0^\circ)$$

$$BDC: (\varphi = +35,2643^\circ \ \lambda = 180^\circ)$$

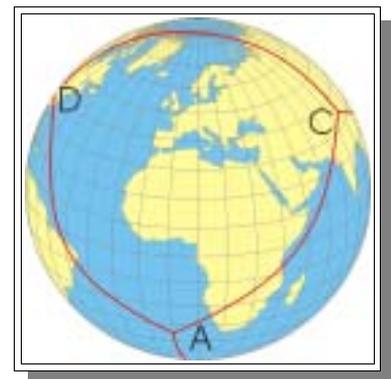
$$DBA: (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = -90^\circ)$$

$$CBA: (\varphi = -35,2643^\circ \ \lambda = +90^\circ)$$

(φ pontos értékei itt is $\pm \arccos \sqrt{2/3}$).



31. ábra: Tetraéder a kockában



32. ábra: Tetraéder vetülete a földgömbön (direkt elhelyezés)

Transzverzális elhelyezés

Ez esetben a tetraéder egyik csúcsa az északi pólus a képe, a déli pólus képe pedig a szemközti lap középpontja, valamint a kezdőmeridián az egyik lap középmeridiánja is egyben.

A szimmetria miatt nyilvánvaló hogy az alapfelületen a gömbháromszögek minden szöge $2\pi/3$ nagyságú, azaz 120° , mivel minden csúcsban 3 lap találkozik. Írjuk fel az egyik oldalra az oldalkoszinusz-tételt:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} * \cos a ,$$

ahol a a háromszög oldalainak hossza, átrendezve: $a = \arccos(-1/3)$. Tehát a maradék 3 csúcs földrajzi koordinátái (az első az északi pólus: $\varphi = 90^\circ$): $\varphi = 90^\circ - a \approx -19,4712^\circ$, és $\lambda = -60^\circ, 60^\circ$ és 180° .

A már megszokott módon osszuk fel egy háromszöget 6 darab kisebb háromszögre. Az így kapott háromszögek mindegyike derékszögű, a másik két szöge pedig $\pi/3$ nagyságú. Erre is alkalmazzuk a Napier szabályt:

$$\cos \beta = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} , \text{ vagyis a csúcsok távolsága a középponttól:}$$

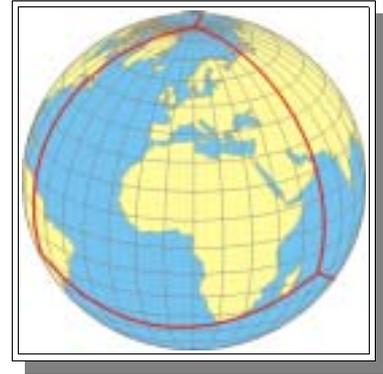
$$\beta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5288^\circ .$$

A színusz-tételből pedig megkapjuk a felezőpont távolságát a középponttól:

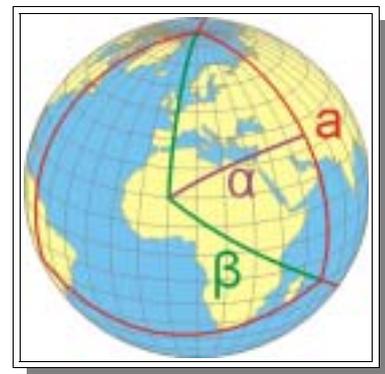
$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \arccos \frac{1}{3}} , \text{ vagyis}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} * \sin \arccos \frac{1}{3} , \text{ azaz}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{3} * \sin \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \right) = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,7356^\circ .$$



33. ábra: Tetraéder vetülete a földgömbön (transzverzális)



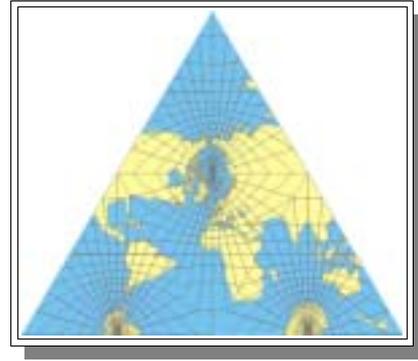
34. ábra: Gömbi tetraéder felosztása

Gnomonikus tetraéder

A legnagyobb (segéd-)pólustávolság a tetraéder esetén $\beta_{\max} = \arccos 1/3 \approx 70,5288^\circ$, ebből kiszámíthatjuk a területtorzulás és a maximális szögtorzulást:

$$\tau = \frac{1}{\cos^3 \beta_{\max}} = 27 \quad \text{és}$$

$$\Delta_{\max} = \arcsin \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{\max}}{2} = 30^\circ .$$



35. ábra: gnomonikus tetraéder (direkt elrendezés)

Területtartó tetraéder vetület (módosított Lambert)

A kockához és az oktaéderhez hasonló módszerrel kapjuk a területtartó tetraédert is. A különbség a poliéderek eltérő geometriai tulajdonságából fakad.

A területegyenlőségből következik, hogy egy háromszög területe \square kell hogy legyen ($4\pi = 4 * T$). A szabályos háromszögeket felosztjuk 6 darab egybevágó részre az alapfelületen és a képfelületen is. A gömbön így egyenlőszárú derékszögű háromszögeket kapunk. Az közös csúcsból húzott meridián által kialakított háromszögekre felírva a területegyenlőségeket kapjuk az átszámozott hosszúságot:

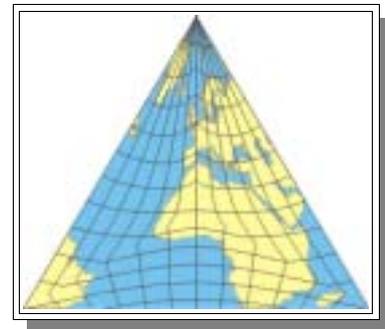
$$\lambda' = \arctan \left[\frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left(\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \lambda \right) + \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right] .$$

A képfelületi meridiánhossz: $A'D' = m * (1/\cos \lambda')$, ahol m a kezdőmeridián képének hossza (a kis háromszög magassága) $m = \sqrt{\pi/(3 \cdot \sqrt{3})}$. Ennek az alapfelületi megfelelője

$$AD = \arctan \left(\sqrt{2} \frac{1}{\cos \lambda} \right)$$

a Napier szabályból. Az eddigiekből behelytesítés után felírható a sugárfüggvény:

$$q' = \frac{A'D'}{2 * \sin \frac{AD}{2}} * 2 \sin \frac{\beta}{2} .$$



36. ábra: Területtartó tetraéder vetület (transzverzális)

Szögtartó tetraéder

A gömb felszínét négy darab egybevágó gömbháromszögre osztjuk, melyeknek szögei $2\square/3$ nagyságúak. Mindegyiküket tovább daraboljuk 6 darab kisebb gömbháromszögre, oly módon, hogy a középpontot összekötjük a csúcsokkal és az oldalak középpontjával, az így kapott kicsiny gömbháromszögek szögei: $\square/2$, $\square/3$ és $\square/3$ nagyságúak.

Ezeket a háromszögeket pedig egy $\pi/3$ nagyságú körszektorra le tudjuk képezni konform módon, majd végül a hat körcikkből összeállt kört a Schwarz integrál segítségével alakítjuk vissza szabályos síkháromszöggé. Végeredményül egy olyan tetraéder vetületet kapunk, amely szögtartó, a tetraéder minden egyes oldala az eredeti szabályos gömbháromszögeknek felel meg. Ezen vetület matematikai leírására legalkalmasabbak a Jakobi-féle függvények.

IKOZAÉDER

Az ikozaéder egy húsz darab szabályos háromszögből álló poliéder. A gömbön ez természetesen szintén húsz darab egybevágó gömbháromszögnek felel meg, melyeknek szögei $2\pi/5$ nagyságúak, hiszen egy csúcsban öt darab háromszög találkozik. Ebből, felhasználva gömbháromszögtani azonosságokat kapjuk a háromszögek többi adatát. Az oldalak hossza:

$$a = 2 * \arccos \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 63,42^\circ ,$$

a csúcsok távolsága a középponttól:

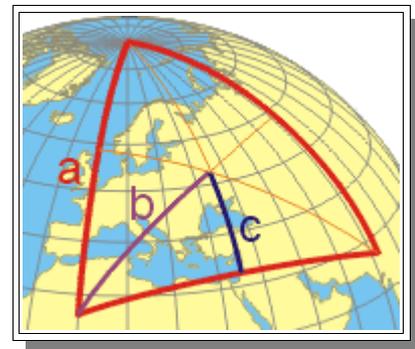
$$b = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 37,3373^\circ ,$$

és az oldalak távolsága a középponttól:

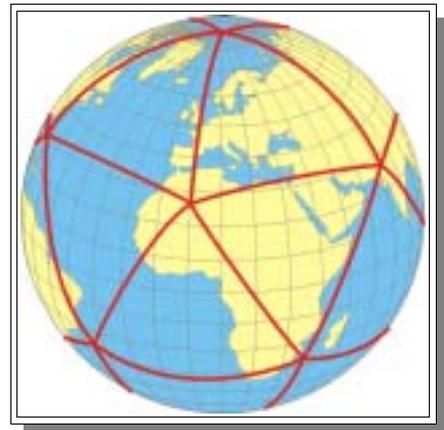
$$c = \arccos \frac{1 + \sqrt{5}}{2 * \sqrt{3}} \approx 20,9052^\circ .$$

Válasszuk direkt elrendezésnek azt a helyzetet, amikor az egyik csúcs van a pólusban. Ebben a helyzetben a húsz oldallap tisztán három csoportra osztható: 5-5 lap érintkezik a déli és északi pólussal, a maradék tíz lap pedig az egyenlítő mentén alkot övet (természetesen nem szabályos gömbövet).

A tizenkét csúcsból tehát kettő a két pólus, a maradék tíz csúcs koordinátáját egyszerűen megkapjuk az oldalhosszból (a), hiszen az nem más itt, mint a csúcsok pólustávolsága $\beta = a; \varphi = \pm(\pi/2 - \beta)$, a hosszúságokat pedig a szimmetria miatt 72 fokként kapjuk. Ha a két félgömböt egyszerre nézzük, akkor a tíz háromszög hosszúsága felváltva egy északi, és egy déli szélességgel.



37. ábra: A gömbi ikozaéder háromszögeinek felosztása

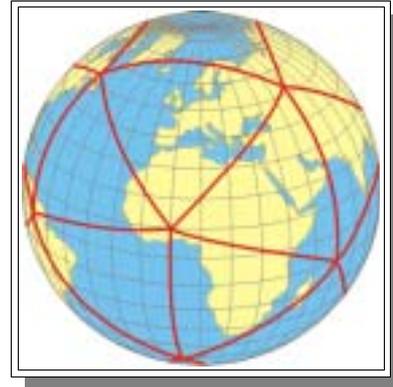


38. ábra: Gömbi ikozaéder (normál)

36 fokként következnek,

Transzverzális elrendezésnél a két pólus egy-egy lap közepére esik. Ekkor test lapjai feloszthatóak egy északi és egy déli féltekére, hiszen az élek közül hat darab egy kvázi-Egyenlítőt alkot, mindegyik metszi a valódi Egyenlítőt, és mind a hat él egész hossza a 11°D és 11°É közé esik.

A csúcsok és a többi jellemző pont koordinátáit itt is megkapjuk a már kiszámított három adat segítségével (a, b, c).



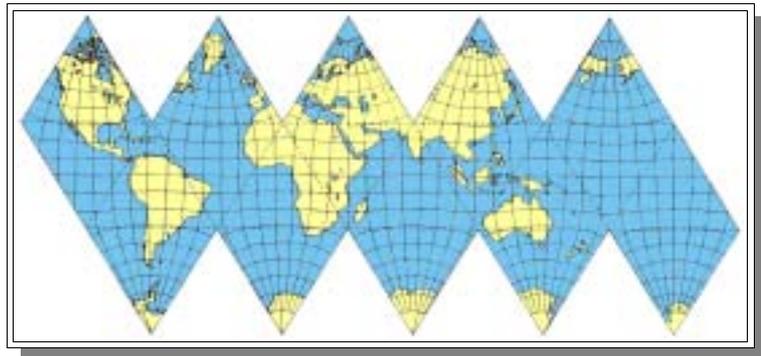
39. ábra: Transzverzális ikozaéder

A vetületek közül itt is említést érdemel a gnomonikus vetület, amelynek ikozaéder esetén már egészen elfogadható torzulási viszonyai vannak. A fenti b segéd-pólustávolsághoz tartozó maximális terület-, és szögtorzulási értékek tehát:

$$\tau = \frac{1}{\cos^3 b} \approx 2 \text{ és}$$

$$\Delta_{\max} = \arcsin \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} \approx 6,55^\circ .$$

Szögtartó vetületet az eddigiekhez hasonlóan az egyes háromszögek 37. ábra szerinti feldarabolásával, majd leképezéseivel kapunk, melyeknek végén egy ilyen kicsiny háromszög egy $\pi/3$ nagyságú körcikkbe képeződik le, tehát az egész háromszög egy körbe, majd ezt a kört a Schwarz-integrál segítségével képezzük síkháromszögbe.



40. ábra: Szögtartó ikozaéder vetület

Területtartó vetületet a korábban említett módosított Lambert-féle területtartó vetületek általánosítása alapján kaphatunk ikozaéderre is (ld. az „Általános területtartó vetület szabályos poliéderekhez” című részt).

DODEKAÉDER

A szabályos dodekaéder tizenkét darab szabályos ötszögből álló test. Egy csúcsában - ugyanúgy ahogyan gömbi megfelelőjén, a gömbi-dodekaéderen - három ilyen poligon található, tehát a gömbi ötszögek szögei $2\pi/3$ nagyságúak.

Ha egy ilyen gömbi ötszöget felvágunk 10 darab kis gömbháromszögre a 41. ábrán látható módon, akkor a kapott kis gömbháromszögek csúcsai $\pi/3$, $\pi/2$ és $\pi/5$ nagyságúak, ami megegyezik a 37. ábrán láthatóval, tehát egybevágó háromszögeket kaptunk érdekes módon. A csúcsok segéd-pólustávolsága (az adott lap középpontjához képest) megegyezik az ikozaédernél számítottakkal, a két befogó azonban szerepet cserélt. Tehát az ötszögben az oldalak hossza (a), a csúcsok távolsága a lapok középpontjától (b), és a lapok középpontjainak távolsága az oldalak felezőpontjától (c):

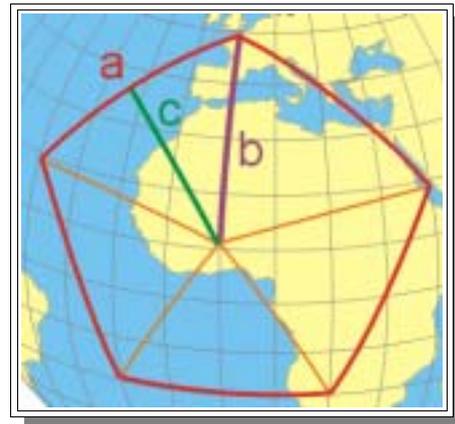
$$a = 2 * \arccos \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx 41,81^\circ$$

$$b = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 37,3373^\circ$$

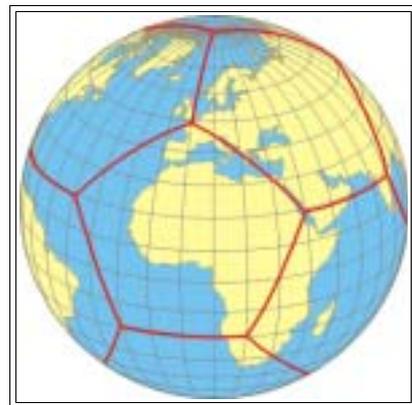
$$c = \arccos \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 31,72^\circ$$

Nevezük itt is normál elrendezésnek azt a helyzetet amikor a pólusok egy-egy csúcsban helyezkednek el. A csúcsok és lapok különböző adatait könnyedén megkaphatjuk az előbbi három adat felhasználásával. Ezen elrendezésben az ötszögeket három csoportra oszthatjuk hasonlóan a normál ikozaéderhez: a három északi pólust érintő északi lapok, ugyanígy három déli lap, és az Egyenlítő által átszelt hat darab egyenlítői lap.

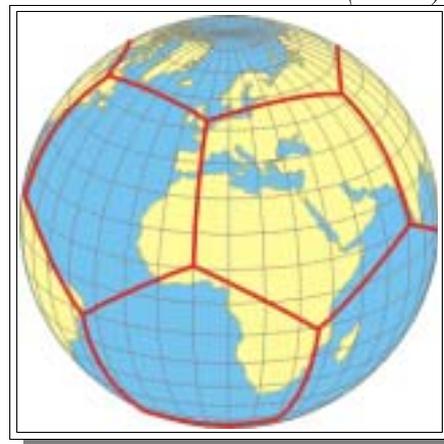
Transzverzális elrendezésnél a két pólus egy-egy lap közepére esik. Ekkor test lapjai itt is feloszthatóak egy északi és egy déli féltékére a transzverzális ikozaéderhez hasonlóan, hiszen az élek közül tíz darab egy kvázi-Egyenlítőt alkot, mindegyik metszi a valódi Egyenlítőt, és mind a tíz él egész hossza a 11°D és 11°É közé esik. A csúcsok és a többi jellemző pont koordinátáit ebben az esetben is megkapjuk a már kiszámított három adat segítségével (a, b, c).



41. ábra: A gömbi-dodekaéder gömbi ötszöge



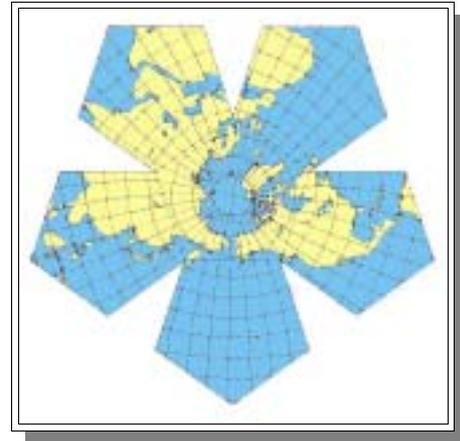
42. ábra: Gömbi dodekaéder (normál)



43. ábra: Transzverzális dodekaéder

Gnomonikus vetületnél a maximális szög-, és területtorzulás értéke ugyan megegyezik az ikozaédernél számítottakkal (hiszen a csúcsok segéd-pólustávolsága megegyezik), azonban a dodekaéder esetében az „átlagos” torzulások várhatóan nagyobbak lesznek, hiszen az egyes lapok pontjai „átlagosan” nagyobb távolságra vannak a középponttól, ami abból is következik, hogy egy gömbi ötszög területe 5/3-da az ikozaéder gömbháromszögei területének.

Szögtartó dodekaéder vetülettel elsőként 1929-ben C. F. Marvin foglalkozott, de csak vázlatokig jutott. A problémát itt az jelenti, hogy a Schwarz integrál $n=5$ esetén csak sorozatokkal közelíthető, konkrét függvénnyel nem adható meg, de az eddigi módszer itt is alkalmazható.



44. ábra: Szögtartó dodekaéder vetület

Területtartó dodekaéder-vetülethez szintén használhatjuk a módosított Lambert-féle területtartó vetületek általánosítását (ld. az „Általános területtartó vetület szabályos poliéderekhez” című részt).

Általános területtartó vetület szabályos poliéderekhez (módosított Lambert-féle síkvetület)

A kocka, az oktaéder és a tetraéder alapján általánosítsuk az elvet bármilyen szabályos poliéderre. Az adott poliéder lapjait felosztjuk $2n$ részre (n az adott lap oldalainak száma). Szükségünk van a következő adatokra: a lap középpontja és az él gömbi távolsága (λ), n (egy lap éleinek a száma), k (egy csúcsban található lapok száma), l (a lapok száma).

A kis háromszögek területe a területegyenlőségből: $T = 4\pi / 2l * n$. Ebből a háromszög magassága (a kezdőmeridián képének hossza):

$$A'B' = \sqrt{\frac{4\pi}{2l * n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}}.$$

A BDA szög a szöghozsinusztételből: $BDA = \arccos(\cos \alpha \sin \lambda)$. Az átszámított hosszúság

$$\lambda' = \arctan \left[\frac{2}{\frac{2\pi}{l * n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}} * \left(\arccos(\cos \alpha \sin \lambda) + \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

A meridiánok képfelületi hossza:

$$A'D' = \sqrt{\frac{2\pi}{l*n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} * \frac{1}{\cos \lambda}}$$

és ennek alappfelületi megfelelője: $AD = \arctan(\tan \alpha / \cos \lambda)$. Végül adódik a sugárfüggvény:

$$q' = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{l*n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} * \frac{1}{\cos \arctan \left[\frac{2}{\frac{2\pi}{l*n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}} * \left(\arccos(\cos \alpha \sin \lambda) + \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right]}}}{2 * \sin \frac{\arctan \left(\tan \alpha \frac{1}{\cos \lambda} \right)}{2}} * 2 \sin \frac{\beta}{2}$$

Láttuk hogy a tetraéder esetén ez $4*3$, azaz 12 különböző vetületet jelent, ez a szám az ikozaéder esetén $20*3=60$, míg egy csonka ikozaéderre (20 hatszög + 12 ötszög) $20*6+12*5=180$ darab vetületet jelent.

FÉLIG SZABÁLYOS POLIÉDEREK

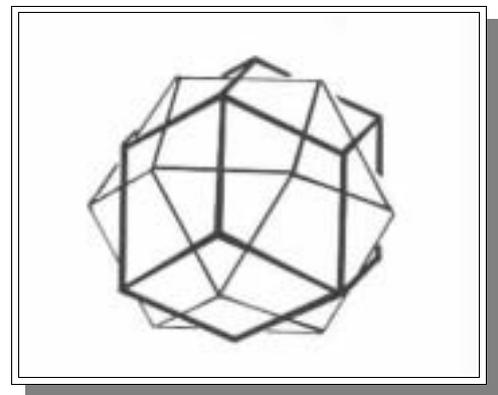
Az Euler-féle Poliéderekhez tartoznak a félig szabályos vagy Arkhimédész-féle poliéderek is. A félig szabályos poliéderek a következő tulajdonságokkal bírnak:

1. lapjai szabályosak
2. konvex
3. testszöglei egybevágók

vagy

1. konvex
2. lapjai egybevágók
3. testszöglei szabályosak

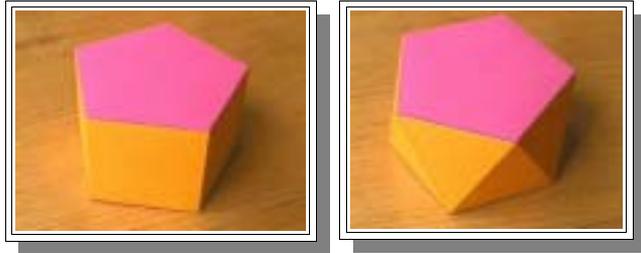
Eszerint két különböző típusú félig-szabályos poliéder létezik. Minden egyik értelemben vett félig-szabályos poliédernek létezik az un. duális poliédere, amely a másik értelemben vett félig szabályos poliéder. A poliéderek közötti duális kapcsolat többféle (topológiai, projektív geometriai, metrikus) összefüggést takar, amely önmagában is érdekes vizsgálódás tárgya lehet.



45. ábra: Duális poliéderek: kuboktaéder és rombikus dodekaéder

A félig szabályos poliédereknek ez a definíciója úgy állt elő, hogy a szabályos poliéderrel szemben támasztott követelmények egy részét elhagytuk. Eszerint minden szabályos poliéder egyszersmind félig szabályos is. Ugyancsak ide tartozik bármely szabályos N oldalú hasáb - más elnevezéssel prizma, melynek az oldallapjai négyzetek, valamint a

szabályos háromszögekből és két darab N oldalú szabályos sokszögből előálló alakzat az ún. szabályos antiprizma.



46. ábra: Hasáb és anti-hasáb (antiprizma)

Arkhimédészi poliédereknek nevezzük azokat a félig szabályos poliédereket, melyek lapjai legalább kétféle szabályos sokszögek (ezzel kizártuk közülük a szabályosakat, valamint a másik értelemben vett félig szabályosakat), nem hasábok, nem antiprizmák. Igazolható, hogy 13 különböző arkhimédészi poliéder (arkhimédészi test) létezik. Az arkhimédészi poliéderek duálisaira - melyeknek a testszögletei szabályosak és a lapjai egybevágók - használatos a katalán poliéder elnevezés. Néha - szűkebb értelemben - csak az arkhimédészi és a katalán poliédereket nevezik félig szabályos poliédereknek.

A legtöbb félig-szabályos poliédert a szabályos poliéderek csonkításával is megkaphatjuk. Például a kocka különböző módon való csonkításával kapjuk a rombusz-dodekaédert, a kuboktaédert vagy a csonka-tetraédert. Mivel a szabályos poliéderek esetén általában a lapok csúcsánál a legnagyobb a torzulás, ezért általában sokkal jobb torzulási viszonyokat kapunk ugyanazt a vetületet alkalmazva (pl. a gnomonikus vetülettel, ami természetesen mindegyik konvex poliéderre alkalmazható) ha a szabályos poliéderek csúcsait levágjuk egy-egy síkkal.

A tizenhárom lehetséges félig szabályos poliéderek (más néven Arkhimédész-féle poliéderek):

- kuboktaéder (3, 4, 3, 4)
- ikozidodekaéder (3, 5, 3, 5)
- csonka tetraéder (3, 6, 6)
- csonka oktaéder (4, 6, 6)
- csonka kocka (3, 8, 8)
- csonka ikozaéder (5, 6, 6)
- csonka dodekaéder (3, 10, 10)
- rombikuboktaéder (3, 4, 4, 4)
- csonka kuboktaéder (4, 6, 8)
- rombikozidodekaéder (3, 4, 5, 4)
- csonka ikozidodekadéder (4, 6, 10)
- pisze kocka (3, 3, 3, 3, 4)
- pisze dodekaéder (3, 3, 3, 3, 5)

A számok azt mutatják, hogy egy csúcsban milyen poligonok találkoznak, tehát például a kuboktaéder esetén minden csúcshoz tartozik egy háromszög, egy négyzet, egy háromszög és még egy négyzet, ebben a sorrendben. Az utolsó kettő poliédernek két féle változata van, amelyeket „jobbos” és „balos”-nak nevezünk, ezek egymásnak tükörképei.

Tágabb értelemben ide tartoznak a már említett hasáb és anti-hasáb poliéderek is, azonban ezeket felsorolni nem lehetséges, hiszen megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. $(4, 4, n)$ és $(3, 3, 3, n)$ az egy csúcshoz tartozó poligonok oldalszáma.

Az ún. kvázi-szabályos poliédereket két féle szabályos poligonból rakhatjuk össze, és elrendezésük olyan, hogy mindegyik poligont a másik fajta sokszögek veszik körül, képletük (m, n, m, n) . Három ilyen poliéder létezik: a kuboktaéder, mely három-, és négyszögekből áll, az ikozidodekaéder, három-, és ötszögekből, valamint az oktaéder, ahol a két halmaz tulajdonképpen ugyanaz, tehát a háromszögeket háromszögek veszik körül. Az (m, n, m, n) elrendezésből következik ezen poliédereknek vetülettani szempontból is fontos geometriai tulajdonsága, hogy az élek főköreket alkotnak. Az oktaéder esetén ez ugye három darab négyzetet jelent, a kuboktaédernél négy darab hatszöget és az ikozidodekaédernél hat darab szabályos tízszöget. Ezek az „Egyenlítő” tehát két egyforma „félpoliéder”-re osztják őket.

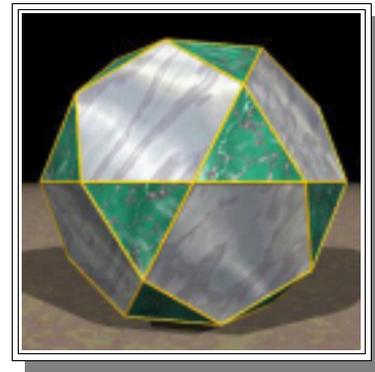
A félig szabályos poliéderek közül az egész Föld ábrázolására talán a csonka ikozaéder a legalkalmasabb, hiszen 32 oldalával meglehetősen jól közelíti a gömbfelszínt, valamint szabályos ötszögei és hatszögei közel egyenlő nagyságúak, tehát nagyjából egyenletesen oszlik el a Föld felszíne a 32 lapon, ellentétben például a csonka ikozidodekaédernel, ami igaz, hogy 62 lapból áll, de a 12 darab szabályos tízszög sokkalta nagyobb mint a kicsiny négyzetek és hatszögek. Az ilyen típusú poliédereket (legfőképpen a csonka dodekaédert és a már említett csonka ikozidodekaédert) inkább akkor használhatjuk, ha egy vagy több, közelítőleg kör alakú területet szeretnénk kiragadni a teljes földfelszínből, és ehhez találunk egy megfelelő elrendezést.

Csonka Ikozaéder

A csonka ikozaéder tizenkettő szabályos ötszögből és húsz darab szabályos hatszögből áll. A hatszögek területe egyenként



47. ábra: Kuboktaéder



48. ábra: Kvázi-szabályos ikozidodekaéder



49. ábra: Csonka ikozaéder

$$T_6 = 6 * \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi \right) = 6 * \left(\beta - \frac{2\pi}{3} \right),$$

ahol β a gömbi hatszögek belső szögeinek nagysága:

$$\beta = 2 * \arccos \left(\cos \frac{\pi}{5} \sec \frac{\pi}{6} \right) \approx 124,3094^\circ.$$

Az ötszögek területe ugyanígy: $T_5 = 5 * (\alpha - 3\pi/5)$, ahol α az ötszögek belső szögeinek nagysága: $\alpha = 2\pi - 2\beta \approx 111,38127^\circ$. Tehát a két terület aránya: $T_5/T_6 \approx 0,653863$. Mivel a hatszögek területe több mint másfélszerese az ötszögének, ezért a maximális torzulásoknál a hatszögeknél várhatóan magasabb értéket fogunk kapni. Ez abból is látszik hogy a hatszögeknél a csúcsok távolsága a középponttól (a segéd-pólustávolság):

$$b_6 = \arccos \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} * \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \approx 23,8^\circ$$

a Napier szabály alapján. Ugyanez az ötszögre:

$$b_5 = \arccos \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} * \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \approx 20,0767^\circ.$$

Vegyük például a gnomonikus vetületet, ekkor a legnagyobb területtorzulás:

$$\tau = \frac{1}{\cos^3 b_5} \approx 1,2 \text{ az ötszögeknél, és } \tau_6 = \frac{1}{\cos^3 b_6} \approx 1,3$$

a hatszögek esetén. A maximális szögtorzulás a csúcspontokban pedig:

$$\Delta_{5 \max} = \arcsin \left(\tan^2 \frac{b_5}{2} \right) \approx 1,8^\circ \text{ az ötszögek esetén, és}$$

$$\Delta_{6 \max} = \arcsin \left(\tan^2 \frac{b_6}{2} \right) \approx 2,54^\circ \text{ a hatszögeknél.}$$

Ezek az értékek azonban csak abban az esetben igazak, ha sima, különálló gnomonikus vetületeket nézünk. Egy valódi csonka ikozaéder esetén, a test geometriája olyan, hogy a hatszögek középpontja kicsivel közelebb van a test középpontjához, mint az ötszögeké, tehát nem létezik ehhez a poliéderhez beírható gömb. A két távolság aránya körülbelül $\delta = 1,02653$. Ha tehát vesszük az egység sugarú gömböt, és egy olyan csonka ikozaédert, ami a hatszögek középpontjában érinti a gömböt, akkor a hatszögekhez tartozó vetületek sugárfüggvénye $q = \tan \beta$, az ötszögeké pedig $q_5 = \delta * \tan \beta$.

A csonka ikozaéderre is kreálható a már megismert módon területtartó és szögtartó vetület is, hasonlóan az eddigiekhez.

Kuboktaéder

Lapjainak száma 14, melyből nyolc szabályos háromszög és hat négyzet, éleinek száma 24, csúcsainak száma pedig 12. Mint az előzőekben már láttuk, a kuboktaéder egyike a kvázi-szabályos poliédereknek, tehát élei négy darab szabályos hatszöget alkotnak, amelyek gömbi főkörnek felelnek meg. Mindegyik ilyen főkör két azonos részre osztja a poliédert, egy ilyen fél-kuboktaédernek a neve „háromszög-kupola”. Ezen testek érdekessége, hogy néhány golfabdában a kis gödröcskék ilyen alakúak. Normális elhelyezésnek nevezzük tehát azt amikor egy-egy ilyen háromszög-kupola egy-egy félgömbnek felel meg. Ekkor a pólusok egy-egy háromszög középpontjában vannak, az Egyenlítőt pedig hat darab egyenlő részre osztja a három-három négyzet és háromszög egy-egy oldala.

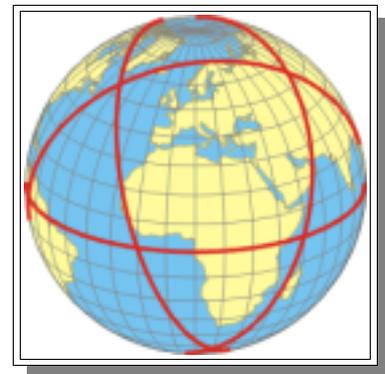
A gömbfelületi kuboktaéder tehát értelemszerűen 8 darab gömbháromszögből és hat darab gömbi négyzetből áll. Mivel minden „él” azonos hosszúságú, ezért mindegyik ilyen gömbi poligonnak oldala $\frac{1}{3}$ hosszúságú. Normál elhelyezésnél a hat egyenlítői csúcspont egyenletesen szétszórva helyezkedik el. A $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú háromszögekből következik, hogy a maradék hat csúcs szélessége (amely nem más mint a háromszögek magassága):

$$\varphi = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 54.7356^\circ .$$

Az egyes lapoknál a vetületi kezdőpont értelemszerűen a poligon középpontjára esik, és mivel a poligonok egyik oldala mind a háromszögek, mind a négyzetek esetén az Egyenlítőre esik, ezért a lapok középpontjának szélességét a gömbháromszögek és négyzetek középpontjainak oldaluktól való távolságából kapjuk, amely a háromszögek esetén $\varphi = \pm \arcsin 1/3$, a négyzetek esetén pedig $\varphi = \pm \arccos \sqrt{2}/3$. A háromszögek és négyzetek váltakozva következnek az Egyenlítő mentén mindkét oldalon, tehát a hosszúságok 60° -onként egyenletesen elosztva következnek. A félgömbönkénti három darab

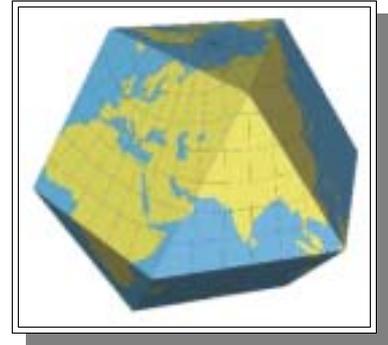


50. ábra: Csonka-ikozaéder vetület Európát ábrázoló lapja



51. ábra: Kuboktaéder vetülete a földgömbön (normál elhelyezés)

háromszög középpontjának hosszúsága minden esetben egybeesik az azon a félgömbön fekvő maradék 3 csúcspontnak hosszúságával, de 60° -kal el van tolva a másik félgömbön fekvő csúcspontokhoz képest.

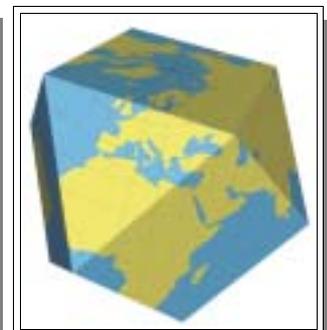
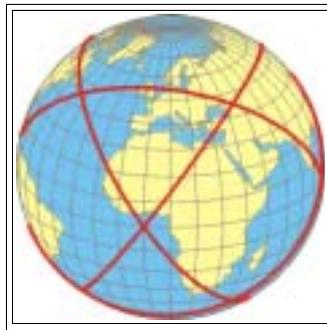


52. ábra: Normál gnomonikus kuboktaéder

Első transzverzális elhelyezésnél a pólusok egy-egy négyzet középpontjára esnek, az Egyenlítő a maradék négy négyzet átlóján fekszik, amint azok négy egyenlő részre osztják. Ebből a négy egyenlítői csúcs koordinátáit meg is kaptuk. A többi nyolc csúcs a négy egyenlítői négyzet nem-egyenlítői csúcsai, és mivel a négyzetek átlói $\sqrt{2}$ hosszúak, ezért a csúcsok szélessége $\varphi = \pm \pi/4 = 45^\circ$, hosszúságaik pedig a négyzetek középpontjainak hosszúságaival egyezik meg. A háromszögek középpontjainak szélességét a csúcsok középpontoktól való távolságából kapjuk - mivel egyik csúcsuk mindegyik esetben az Egyenlítőn van - ami nem más mint

$$\varphi = \pm \arccos \sqrt{2/3} \approx 35.2644^\circ.$$

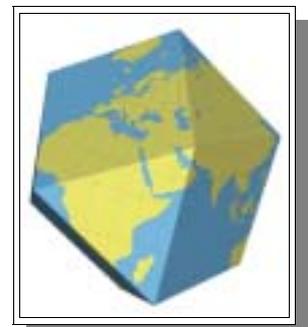
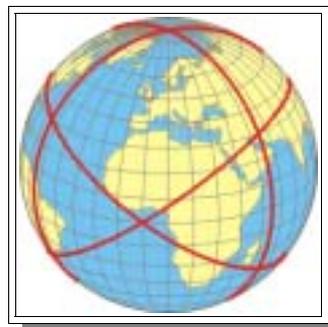
Az északi és déli félgömbön levő négy-négy csúcs hosszúságai páronként megegyeznek, és 90° -onként követik egymást az egyenlítői csúcsok között félúton.



53. ábra: Kuboktaéder vetület, első transzverz elhelyezés

Egy másik kitüntetett elrendezési mód, ha a pólusok a poliéder szemközti csúcsain fekszenek. A csúcsokon átmenő felező-hatszögek tulajdonságait kihasználva megkapjuk a rajtuk fekvő többi nyolc csúcs szélességét: $\varphi = \pm \pi/6$, a nem ezeken a felező hatszögeken fekvő két csúcs pedig a szimmetria folytán az Egyenlítőre kell hogy essen. Válasszuk továbbá, a négyzetek átlóján végigvonuló felező

főkört kezdőmeridiánnak. Ez esetben két további csúcs koordinátáit meg is kaptuk, hiszen a kezdőmeridián és az egyenlítő metszéspontjain vannak. Az előbb említett nyolc csúcs hosszúságait pedig a $\sqrt{3}$ oldalú négyzet belső szögének kiszámításával kapjuk, ami nem más, mint $2 * \arctg \sqrt{2}$, tehát a keresett hosszúságok:



54. ábra: Gnomonikus kuboktaéder, második transzverz elhelyezés

$$\lambda = \pm \arctg \sqrt{2} \approx \pm 54.7356^\circ \text{ és}$$

$$\lambda = \pm (\pi - \arctg \sqrt{2}) \approx \pm 125.2644^\circ .$$

A lapok középpontjainak meghatározásánál a négyzetek esetén van könnyebb dolgunk, hiszen közülük négy a - tágabb értelemben vett - kezdőmeridiánon fekszik, mégpedig a szimmetria miatt $\varphi = \varphi/4$ szélességnél, a másik kettő középpontja pedig az Egyenlítő és a $\varphi/2$ -es meridiánok metszéspontjánál van. A háromszögek esetén csupán a csúcsok középponttól való távolságára van szükségünk, ami egyenlő $\arcsin 1/3$ -dal. Tehát a négy egyenlítői háromszög esetén (értelemszerűen szélességük $\varphi = 0$) a hosszúságok

$$\lambda = \pm \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 35.2644^\circ \text{ és}$$

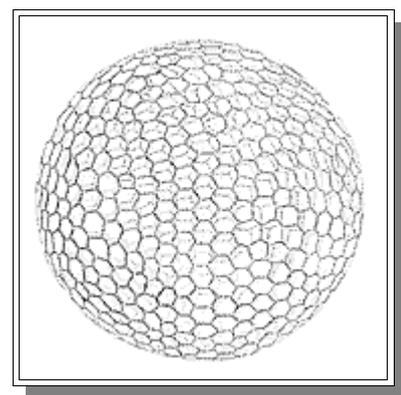
$$\lambda = \pm \left(\pi - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx \pm 144.7356^\circ$$

értékeket vesznek fel. A maradék négy háromszög közepe viszont a $\varphi/2$ -es meridiánokra esik és pólustávolságuk egyenlő a már említett csúcs-középpont távolsággal. Tehát a szélességek:

$$\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx \pm 54.7356^\circ .$$

Ezen három elrendezési módon kívül természetesen végtelen sok ferde elrendezés is létezik. Ezek mindegyikére, és a többi félig szabályos poliéder összes változatára alkalmazhatjuk akár a szabályos poliédereknél bemutatott módosított Lambert-féle területtartó vetületet, akár a bemutatott szögtartó vetületet.

Továbbmenve természetesen a poliéderekkel egyre jobban megközelíthetjük a gömbalakot, kilépve ezzel a szabályos és félig szabályos, azaz az Arkhimédész-, és Platon-féle poliéderek köréből. Az állattanból jól ismert sugárállatkáknak egy csoportja is például ilyen sok oldalú poliéderekkel kapcsolatos. Allopolygona névvel illetik azon fajokat, melyek alakja megközelíti a gömböt, azonban teljesen szabálytalanok. Egy másik csoport pedig az Isopolygona, amelyek szintén szabálytalanok ugyan, ám vázának lapjai egybevágó sokszögek. (Természetesen a sugárállatkák között is megtalálhatóak a szabályos poliéder vázúak.) Egyik meglehetősen figyelemre méltó alfaja az Auloni Hexagona, amely nevével ellentétben nemcsak hatszögekből, hanem ötszögekből is áll a csonka ikozaéderhez hasonlóan, és ezek szerint az Allopolygona csoportba

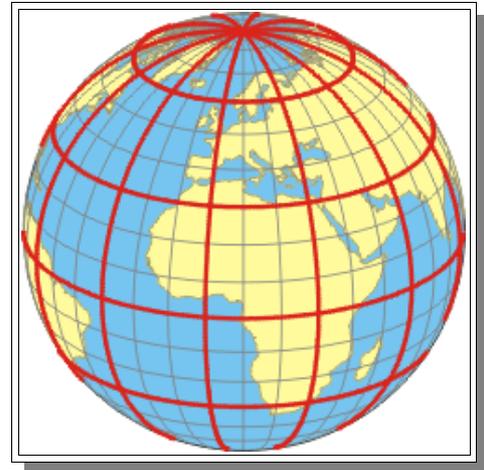


55. ábra: Aulonia Hexagona

tartozik. Mint az 55. ábrán látható egy ilyen poliéder már igen jól megközelíti a gömb alakot.

POLIÉDER VETÜLETEK FOKHÁLÓZAT MENTI FELOSZTÁSSAL

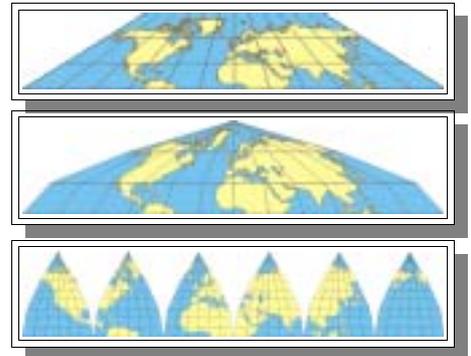
Poliéder rendszert kaphatunk akkor is ha a gömböt nem gömbi főkörök, hanem a fokhálózati vonalak mentén osztjuk fel poligonokra. Ebben az esetben tehát bizonyos paralelkörök és meridiánok képeinek kell egyenesre leképeződnie. Tehát az eddigiektől eltérően a gnomonikus vetület erre nem használható. Kivételek persze erre is vannak, például a szabályos oktaéder normális elhelyezésben, ahol a határoló paralelkör (az Egyenlítő) és a határoló meridiánok egyben gömbi főkörök is. Általában a felosztásból adódó foktrapézokat síktrapézba képezzük le (határesetben a gömbháromszögeket síkháromszögekbe).



56. ábra: A gömb 30°-os felosztása foktrapézokra

Ha a határoló paralelkörök hossztartóak, akkor értelemszerűen az egyes lapok összeilleszthetőek egymással megszakadás nélkül. Legyen a két határoló paralelkör φ_1 és φ_2 , $d\lambda$ pedig a foktrapézban a két határolómeridián hosszúságkülönbsége. Ekkor a foktrapéz területe: $F = d\lambda * (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$. A képfelületi síktrapéz alapjai $a = d\lambda \cos \varphi_1$ és $b = d\lambda \cos \varphi_2$.

Mivel a határoló paralelkörök egyenesekre kell hogy leképeződjenek, ezért gyakoriak a vetületcsaládon belül azok a vetületek, amelyekben a többi paralelkör képe is (egymással párhuzamos) egyenes. Tehát a vetület maga a teljes gömböt trapéz kontúrban ábrázoló képzetes hengervetületet. Ha több ilyen vetületből (különböző normálpáralelkörökkel) készítünk egy összetett vetületet, úgy hogy az adott vetületi egyenlet csak a két normálpáralelkör közötti szélességekre vonatkozik, akkor egy összetett képzetes hengervetületet kapunk, amit ha megszakítunk több középmeridiánnal, akkor egy térbeli testé összehajtható elrendezést kapunk.



57. ábra: Általános poliéder vetület

Nyilvánvalóan a normálpáralelköröket és a középmeridiánokat tetszőlegesen választhatjuk meg, tehát tulajdonképpen minden egyes ilyen vetület végtelen sok vetületi rendszerből álló vetületrendszer-családot jelent.

Általános poliéder vetület hossztartó középmeridiánnal

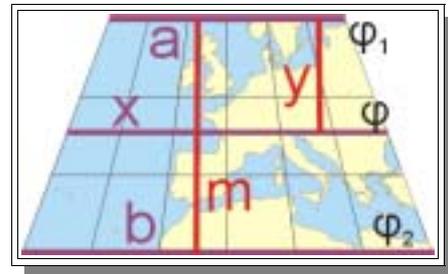
Ebben az egyszerű esetben a síktrapéz magassága $m = \varphi_1 - \varphi_2$, és egy adott φ szélességhez tartozó y koordináta: $y = \varphi_1 - \varphi$. A trapéz tulajdonságaiból, valamint a párhuzamos szelő szakaszok tétele alapján kapjuk a következő egyenletet:

$$\frac{b-a}{2} = \frac{x-a}{2} \quad \text{és ezt átrendezve}$$

kapjuk az x koordinátát:

$$x = \frac{y}{m} * (b-a) + a \quad \text{vagyis}$$

$$x = -\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi_1 - \varphi_2} * \lambda (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) + \lambda \cos \varphi_1$$



58. ábra: Foktrapéz hossztartó középmeridiánnal

Területtartó általános poliéder vetület

Határoló paralelkörök legyenek itt is hossztartóak, vagyis $a = \lambda \cos \varphi_1$ és $b = \lambda \cos \varphi_2$. A foktrapéz felszíne természetesen itt is $F = \lambda * (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$. A síktrapéz területe az ismert képletből számolható: $T = (a+b)m/2$. A területegyenlőség feltételezésével a két egyenletet egyenlővé téve kapjuk:

$$\lambda * (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) * \frac{m}{2} = \lambda * (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2),$$

ezen egyenletet átrendezve kapjuk a trapéz magasságát:

$$m = 2 * \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}.$$

Minden ilyen alap-trapézon belül is megköveteljük a területegyenlőséget, tehát minden tetszőleges φ -re (φ_1 és φ_2 között) fenn kell hogy álljon az egyenlőség az alapfelületi $F = \lambda * (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)$ és a képfelületi $T = (a+x)y/2$ területek között, ahol y a φ szélességhez tartozó magasság, x -et pedig az előző pontban ismertetett $x = y/m * (b-a) + b$ képletből kapjuk. x -et behelyettesítve:

$$T = \frac{2\lambda \cos \varphi_1 + \frac{y}{m} \lambda (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{2} * y.$$

Ezt kell tehát az alapfelületi foktrapéz felszínével egyenlővé tenni, hogy y -t megkapjuk φ függvényében.

$$\lambda * (\sin \varphi - \sin \varphi_2) = \frac{2 \lambda \cos \varphi_1 - \frac{y}{m} \lambda (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{2} * y$$

$$2 * (\sin \varphi - \sin \varphi_2) = y * (2 \cos \varphi_1) - y^2 * \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{m},$$

innen pedig a másodfokú egyenlet megoldóképletével kapjuk y-t:

$$y = \frac{2 \cos \varphi_1 \pm \sqrt{(2 \cos \varphi_1)^2 - 8 \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{m} (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}}{2 \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{m}}.$$

Az x koordinátát, a paralelkörök ekvidisztanciája miatt a

$$x = \lambda \cos \varphi_1 \pm \frac{y}{m} * \lambda (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \text{ egyenlet segítségével számítjuk.}$$

A fokhálózat menti torzulások: a meridiánmenti hossztorzulás

$$k = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{\sin \theta}, \text{ a paralelkörmenti hossztorzulás}$$

$$h = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right| \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ mivel képzetes hengervetületekről van szó.}$$

Egyszerűsítés kedvéért vezessük be a $c = \cos \varphi_1$, $d = \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1$ konstansokat. Ezek behelyettesítésével

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{m} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{4c^2 - 8 \frac{d}{m} * (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}} * 8 * \frac{d}{m} \cos \varphi,$$

tovább egyszerűsítve

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{4c^2 - 8 \frac{d}{m} * (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}}, \text{ valamint}$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right| = c - \frac{y}{m} * d \text{ y-t behelyettesítve:}$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right| = c - \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 8 \frac{d}{m} * (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}}{\frac{2 * d}{m}} \frac{d}{m} = \frac{1}{2} * \sqrt{4c^2 - 8 \frac{d}{m} * (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}$$

Ezekből kapjuk a területtorzulást:

$$\tau = h * k * \sin \theta = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right| \frac{1}{\cos \varphi} * \frac{dy}{d\varphi} = 1 ,$$

tehát valóban területtartó vetület(ek)et kaptunk.

Általános poliéder vetület hossztartó határoló-paralelkörökkel és határolómeridiánokkal

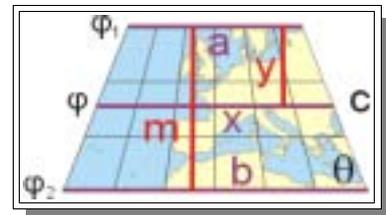
Lényegében megegyezik a hossztartó középmeridiános változattal. Az alapfelületen a határolómeridián és a középmeridián is (mint minden meridián a foktrapézon belül) ugyanolyan hosszú, különbség a hosszakban csak a képfelületen van. A képfelületen a határolómeridián hossza egyenlő az alapfelületi hosszal: $c = \varphi_1 - \varphi_2$ a trapéz magassága pedig $m = c * \sin \varphi$. \square -t a következő összefüggésből kapjuk:

$$c * \cos \varphi = \frac{b - a}{2} = \frac{\lambda}{2} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) .$$

A hossztartás miatt szimplán ezzel a $\sin \square$ -val kell beszorozni az eredeti $y = \varphi - \varphi_2$ egyenletet. Az x koordinátát pedig a párhuzamos szelő szakaszok tétele alapján a paralelkörök ekvidisztanciája miatt a

$$\frac{b - a}{m} = \frac{x - a}{y} \text{ egyenlőségéből kapjuk:}$$

$$x = \lambda \cos \varphi_1 \pm \frac{y}{m} * \lambda (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) .$$



59. ábra: Foktrapéz hossztartó határolómeridiánnal

POLIÉDER ALAPÚ FÖLD-ÁBRÁZOLÁSOK

Végezetül nézzünk néhány érdekesebb példát, melyeken a Földet különböző poliédereken ábrázolják. Ezen esetekben nem feltétlenül a vetülettané a főszerep.

Jeremy Pool, az általa tervezett és készített „Mercator Globe Navigator”-hoz, Mercator 1541-es földgömbjének digitális változatához például a glóbuszt csonka-ikozaéder alapon osztotta fel 32 részre, és ennyi részletben digitalizálta be e történelmileg híres földgömböt.

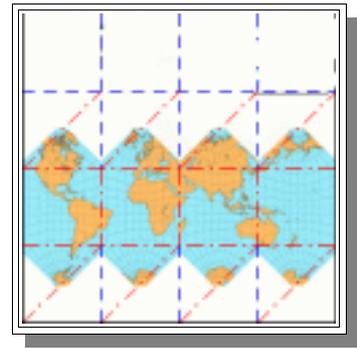


60. ábra: Mercator 1541-es földgömbje

A híres japán tudós és origami-művész Fujimoto Shuji modellje talán a legelegánsabb példája a hajtogatott „földgömböknek”. Egy négyzet alakú papírlapból csupán hajtogatás útján, vágások nélkül válik kocka alakú Föld.

Haga Kazuo egy hasonló művel, csak éppen oktaéder formában hívta fel magára a figyelmet kartográfus körökben. Természetesen a többi origami-poliéder műből is lehet glóbuszt faragni, csak a megfelelő helyre szükséges rakni magát az ábrázolást.

Itt kívánkozik említésre az origami és a kartográfia másik közös metszete, az úgy nevezett *Miura-ori* hajtogató-technika, melynek segítségével igen nagy térképek egyetlen mozdulattal hajtogathatók össze és szét.



61. ábra: Fujimoto origami-földgömbje

A poliéder alapú Földábrázolások a művészetet sem kerülhették el. Maurits Cornelis Escher (1898-1972), a bámulatosan eredeti matematikus-művész különös fametszetei is poliédereken ábrázoltak a Földhöz hasonló, bolygószerű entitásokat. „Dupla Bolygó” című műve (Double Planetoid) 1949-ből csillag alakú oktaéderen alapszik, míg „Tetraéder Bolygó” (Tetrahedral Planetoid) fametszete tetraéder alakú.



62. ábra: Escher: Double Planetoid



63. ábra: Escher: Tetrahedral Planetoid

Mint láthatjuk, a különböző poliéderek és a rájuk alkalmazható vetületek szerteágazó kapcsolatát komplett módon leírni talán a lehetetlen feladatok közé sorolhatjuk. Ezen kis gyűjteményben csak a leggyakoribb poliéderek és néhány tipikus vetület kombinációit mutattam be néhány figyelemre méltó példával egybekötve. Mint láttuk a végeredmény és a cél még így is igen tág határok között mozoghat.

A vetülettani, geometriai sokszínűség és precizitás mellett a poliéder-glóbuszok vagy poliéder-térképek célja nem minden esetben a rendkívüli pontosság, hanem gyakran az eredetiség, a művészi hatás teszi érdekessé ezen alkotásokat, néha már-már kissé elrugaszkodva a hagyományos térkép-fogalomtól...

Irodalomjegyzék:

Irving FISHER, and Osborn Maitland MILLER: World Maps and Globes. (1944)

L. P. LEE: Conformal Projections Based on Elliptic Functions (1976)

Robert G. RASKIN: Spatial Analysis on the Sphere: A Review. Technical Report 94-7 (1994)

MADARASSY P. - GUSZLEV A.: A vetülettan alkalmazásai térbeli alakzatokon – (1999)

HAZAY I.: Vetülettan (1964)

Karen A. MULCAHY: Map projections and spatial referencing for global data sets (1997)
<http://www.spatial.maine.edu/ucgis/testproc/mulcahy/mulcahy.html>

Denis WHITE, A.J. KIMERLING, K. SHAR, and L. SONG.: Comparing area and shape distortion on polyhedral-based recursive partitions of the sphere (1998)
<http://www.epa.gov/wed/pages/staff/white/cagis.95.pdf>

Terra Cognita: Discrete Global Grid Research
<http://bufo.geo.orst.edu/tc/firma/gg/index.html>

George W. HART: Polyhedra and Art
<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/art.html>

Buckminster Fuller Institute: Our spaceship Earth
<http://www.bfi.org/map.htm>

Carlos A. FURUTI: Polyhedral Maps
<http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/ProjPoly/projPoly.html>