

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A Baranyi-vetületek explicit vetületi egyenleteinek meghatározása

SZAKDOLGOZAT
FÖLDTUDOMÁNYI ALAPSZAK
TÉRKÉPÉSZ ÉS GEOINFORMATIKUS SZAKIRÁNY

Készítette:

Zelenka Balázs

Témavezető:

Gede Mátyás

adjunktus

ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék



Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

Matematikai jelölések.....	4
1. Bevezetés.....	5
2. Vetületek	6
2.1. Vetületi egyenletek	6
2.2. A vetületek csoportosítása	7
2.3. Képzetes vetületek	8
2.4. Összetett vetületek	9
2.4.1. Goode-vetület	10
2.4.2. Érdi-Krausz-vetület	10
3. A Baranyi-vetületek	11
3.1. A Baranyi-vetületek általános ismertetői.....	11
3.2. A vetületek bemutatása és a kontúregyenletek	12
3.2.1. Baranyi I.	13
3.2.2. Baranyi II.....	14
3.2.3. Baranyi III.....	16
3.2.4. Baranyi IV.	17
3.2.5. Baranyi V.....	17
3.2.6. Baranyi VI.	19
3.2.7. Baranyi VII.....	20
3.3. Szélesség- és hosszúságfüggvények	21
3.3.1. Egyszerű függvények	21
3.3.2. Közelítő függvények.....	22
3.3.3. Legkisebb négyzetek módszere	22

3.3.4.	Gauss–Jordan-elimináció.....	23
3.3.5.	A kiszámolt függvények.....	24
3.4.	A sávok összeillesztése.....	25
3.5.	Méretarányok.....	26
3.6.	A kiszámolt egyenletek.....	27
4.	A vetületek megjelenítése HTML Canvas-ben JavaScripttel.....	35
5.	Összefoglalás.....	37
	Függelékek.....	38
	Köszönetnyilvánítás.....	40
	Irodalomjegyzék.....	41
	Nyilatkozat.....	42

Matematikai jelölések

φ, λ földrajzi szélesség, hosszúság

x, y vetületi koordináták

E egyenlítő hossza

K középmeridián hossza

P pólusvonal hossza

r_1 egyenlítőről húzott körív sugara

r_2 középmeridiánról húzott körív sugara

φ_H az összetett vetület sávjainak határoló szélessége

δ az egyenlítő és a kontúrok csatlakozási pontjába húzott sugár által bezárt szög

η δ pótszöge

X a középmeridiánról húzott körív középpontjának és a vetületi középpont távolsága

H az egyenlítő és a sávok határa közti távolság

1. Bevezetés

A térképészet történelme során mindig nagy fejtörést okozott a teljes Föld síkon való ábrázolása. A vetülettan egyik célja, hogy ez a leképezés a lehető legjobban visszaadja a valóságot, ami a kis méretarányú térképeken különösen nehéz feladat. Baranyi János (1932-1990) több kísérletet is tett a vetülettan határainak feszegetésére, és sajátos hozzáállással olyan egyedülálló vetületeket is szerkesztett, amelyek nem csak hazánkban, de világviszonylatban is ismertté váltak. A II. és IV. vetülettel többször találkoztam tanulmányaim során, és felvetődött bennem a kérdés, hogy vajon mi lehetett a sorsa a többi vetületnek.

Baranyi János 1957-ben végzett az ELTE-n térképészként, és a Kartográfiai Vállalatnál kapott munkát. A tömeggyártó térképészet kevésbé érdekelte, inkább kreatív megoldásokat kutatott a vetülettan terén, ennek köszönhetően kapott kutatói feladatkört a vállalaton belül. Első hét vetületét 1968-ban publikálta (Baranyi, 1968). Volt tanárával, Karsay Ferencsel 1971-ben nekiálltak, hogy a II. és IV. vetület torzulásait vizsgálják, összevegyék más vetületekkel, és ismertebbé tegyék azokat (Baranyi & Karsay, 1971). A Kartográfiai Vállalat átvette ötleteit, a történelmi atlaszokban Van den Grintent vetületét felváltotta a II. vetület, a világtaszokban (elsőként a Gazdasági Világtaszban) pedig Érdi-Krausz vetületét cserélték a IV. vetületre. Baranyi és Karsay 1989-ben nekiállt, hogy a II. vetületet egyenleteit leírják, ehhez később csatlakozott Györfly János is, aki teljes értékűre hozta az egyenleteket, majd elkészítette a IV. vetület egyenleteit is, majd ezeket publikálta Baranyival (Baranyi & Györfly, 1990). Az első publikációban szereplő másik öt vetület egyenlete nem készült el, csak rajzi utasítások maradtak.

Baranyi a bemutatásra kerülő hét vetületen kívül még sok egyéb vetületet is szerkesztett. Balla Zsuzsa, aki a Kartográfiai Vállalat térképszerkesztője és Baranyi kollégája volt, összegyűjtötte Baranyi kéziratait, rajzait és leveleit, majd átadta Györflynek, akinél ennek köszönhetően hozzáférhettem egyéb munkáihoz (Baranyi IX., XI., későbbi munkái az XII. és az XIII.), illetve vázlataihoz, amikből sokat tudtam meríteni.

Szakedolgozatomban végül csak a fent említett, 1968-ban publikált hét vetületen dolgozom. Célkitűzésem a kevésbé ismert vetületek egyenleteinek leírása és digitális megjelenítése.

2. Vetületek

A Föld alakját forgási ellipszoiddal, vagy egyszerűbb esetben gömbbel közelíthetjük. Az ellipszoid és a gömb felülete torzulások nélkül nem ábrázolható síkon. Azt a matematikai módszert, amely a földfelszíni alapfelületet egy síkon értelmezett képfelületre konvertálja, vetületnek nevezzük. Ahhoz, hogy tisztán matematikai egyenletekkel leírjuk a transzformációt, paramétereznünk kell a két felületet.

2.1. Vetületi egyenletek

A vetületi egyenletek azon matematikai függvények, amelyek a Földön értelmezett gömbi koordinátákat a térképen kölcsönösen egyértelmű síkkoordinátákra képezik. Mivel síkra képezzük, két egyenletre van szükségünk (Györffy, 2012):

$$x = x(\varphi, \lambda) \text{ és } y = y(\varphi, \lambda)$$

Az egyenletek értelmezéséhez paramétereznünk kell a Földet és a síkot, hogy egyértelműen írassuk le az összefüggést. A kartográfia azon oldalát, amely a földfelszín egészének, vagy nagy részének leképezésével foglalkozik, geokartográfiának nevezzük, és mivel a geokartográfiában gyakran gömbi alapfelületet használunk, akárcsak a később kifejezendő Baranyi-vetületek egyenleteinél, ezért elegendő csak a gömböt megemlíteni. A gömb felszínén egy pont két koordinátával, pontosabban két szöggel megadható. A Föld forgástengelyére merőleges, a gömb középpontját is tartalmazó sík az Egyenlítő síkja (Györffy, 2012). Az első koordináta a földrajzi szélesség, egy adott pontból a gömbi középpontba húzott egyenes, és az Egyenlítő síkja által bezárt szög, jele φ . A paralelkörök azon pontok által kirajzolt körök, amelyek földrajzi szélessége azonos. A gömbfelszínen futó, a gömbi középpontot tartalmazó, és a két póluson áthaladó körök a meridiánok. A második koordináta, a földrajzi hosszúság, a pontot tartalmazó meridián és egy önkényesen kijelölt kezdőmeridián síkjai által bezárt szög, jele λ . Ez a kezdőmeridián a geokartográfia esetében a greenwichi délkör. A képfelület sík, tehát a térképen síkbeli koordináta-rendszereket alkalmazunk. Ez általában derékszögű vagy poláris koordináta-rendszert jelent. Munkám során a derékszögű koordináta-rendszert alkalmazom, amelyben az x tengely az északi, az y tengely pedig a keleti irányt jelenti. A koordináta-rendszer origója a vetületi középpont, amely a Baranyi-vetületek esetében az é. sz. 0° , k. h. 10° pontra esik. Az esztétikai okokat, amelyek ezt írják elő, később részletezem.

2.2. A vetületek csoportosítása

A vetületeket nagyon sok szempont szerint csoportosíthatjuk. Az elsődleges szempont általában az alkalmazás szerinti csoportosítás, amelyek pedig a torzulások jellegéből adódnak. Torzulás szerint egy vetület lehet szögtartó, területtartó vagy általános torzulású. Egy térkép szögtartó, ha bármely pontjában vett bármely térképi szög megegyezik a valósággal. Egy térkép területtartó, amennyiben bármely térképen felvett terület arányosan megegyezik a valósággal. Semmilyen térkép nem lehet egyszerre szög- és területtartó, tehát semmilyen térkép nem lehet teljes egészében hossztartó. Ugyanakkor egy térképen előfordulhatnak hossztartó vagy akár torzulásmentes vonalak és pontok. Azt a térképet, amely egészében sem szögtartó, sem területtartó, általános torzulásúnak nevezzük. Mindhárom típusnak megvan a felhasználási területe a geokartográfiában, például szögtartók a navigációs térképek, területtartók a vegetációt vagy gazdaságot bemutató térképek, és általános torzulásúak a kontinensek alakját és arányait közelítően helyesen bemutató térképek.

A másik nagy csoportosítási szempont a fókuszjellege alapján történik, amely pedig a vetületi egyenletek matematikai törvényszerűségéből adódik. Ezek alapján beszélhetünk valódi és képzetes vetületekről. A valódi vetületek a perspektív vetületek általánosításai. A perspektív vetületek fizikailag, geometriailag előállíthatók a valóságban vetítés segítségével. (Nem indokolatlan tehát a „vetület” szó kialakulása sem.) A valódi vetületeket három tulajdonság határozza meg (Györffy, 2012):

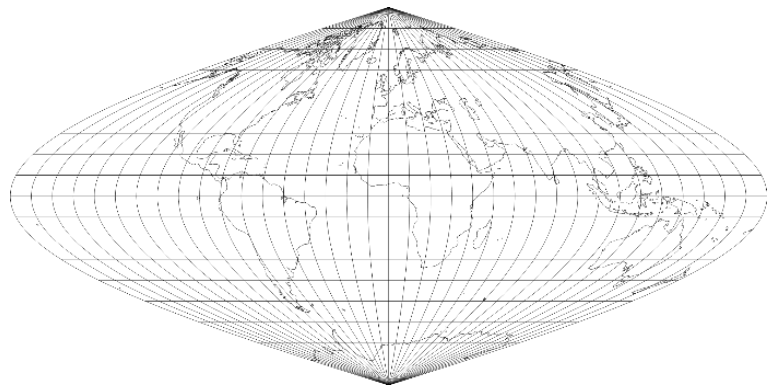
- A paralelkörök képei koncentrikus körök, körívek vagy párhuzamos egyenesek.
- A meridiánok képei egy ponton áthaladó vagy párhuzamos, egyenközűen elhelyezkedő egyenesek.
- A meridiánok és a paralelkörök képei merőlegesen metszik egymást.

A vetítés során még egy csoportosítással élhetünk, mégpedig a képfelület alakja szerint. A geometriai vetítés során a Föld képét többek között síkra, kúppalástra vagy hengerpalástra vetíthetjük, melyek aztán kiterítve torzulásmentesen síkba fejthetők. A képfelület típusai határozzák meg a fent említett tulajdonságokat. Ha a paralelkörök koncentrikus körök, akkor síkvetületet, ha koncentrikus körívek, akkor kúpvetületet, és ha párhuzamos egyenesek, akkor hengervetületet kapunk.

2.3. Képzetes vetületek

Abban az esetben, ha a valódi vetületeknél említett három tulajdonság közül legalább egy nem teljesül, képzetes vetületről beszélünk. Ha a tulajdonságoknak nem is mindegyike teljesül, részben kaphatunk olyan jellegzetességeket, amelyekkel a valódi vetületekhez hasonlóan csoportosíthatunk. Ilyenkor képzetes sík-, kúp- vagy hengervetületekről beszélünk, illetve az egyéb képzetes vetületekről, amelyek egyik kategóriába sem esnek bele. Az egész Föld ábrázolásában a képzetes vetületek, ezen belül is a képzetes hengervetületek jeleskednek. Meg kell jegyezni, hogy az egyéb képzetes vetületek között is akad a geokartográfiában használt közkedvelt vetület, mint például Hammer vetülete vagy a Winkel Tripel, ugyanakkor a történelem folyamán a hengervetületek használata volt a legelterjedtebb, és ha nem is használják némelyiket manapság, jó alapot adtak a ma is használt legjobb vetületekhez.

Fontos megemlíteni a Mercator–Sanson, másnéven szinuszoszoidális vetületet, az első képzetes vetületet, amelyet geokartográfiában használtak (1. ábra). Mercator használta atlaszaiban 1600-as években, majd Sanson 1650-es években a kontinenstérképein

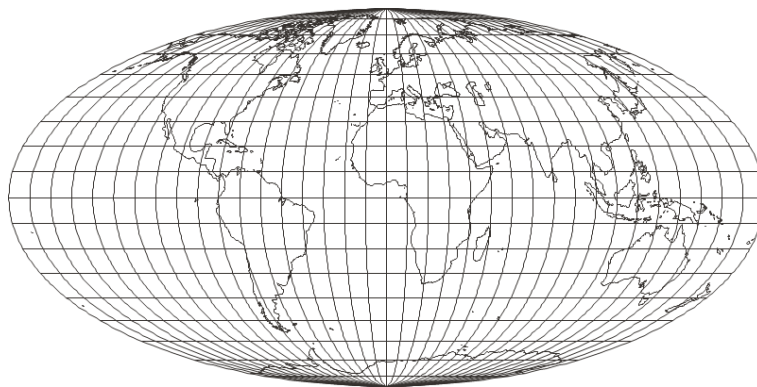


1. ábra: Mercator–Sanson-vetület
forrás: Gede Mátyás (2004)

és Flamsteed a csillagtérképein (Snyder, 1987). A vetület alapja, hogy a paralellkörök és a meridiánok hossztartók, így a kontúrvonala a határoló meridiánokon szinuszoszoidális, és a vetület területtartó.

Másik közismert példa Mollweide vetülete (2. ábra). Carl B. Mollweide 1805-ben publikálta vetületét, amely Apianus II. ellipszis kontúrú vetületét használta fel átszámozva a szélességet úgy, hogy területtartó vetületet kapjunk. A vetület kontúrja továbbra is ellipszis,

a sarkok környékén pedig kevésbé torzít, mint a szinuszoidális vetület (Snyder, 1987 és Györffy, 2012).



2. ábra: Mollweide-vetület
forrás: Gede Mátyás (2004)

A képzetes hengervetületek között tovább alkotott Max Eckert hat ismert vetületével, területtartókkal és általános torzulásúakkal egyaránt. (A

képzetes hengervetületek között nem létezik szögtartó). V. V. Kavrajzkij orosz és Karlheinz Wagner német kartográfus is készített világszerte használt hengervetületeket (Snyder, 1987).

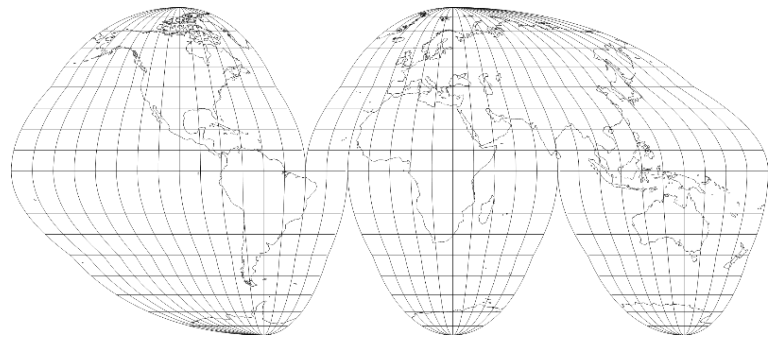
A képzetes vetületű világtérképek legfőbb céljává a vetületi torzulások minimalizálása vált. A különböző szélességeken vett előnyös torzulások felhasználhatóak, így jobb vetületet lehet összegyúrni több vetületből. Az első megoldás két vetületi egyenlet számtani közepének vétele, ezeket hívjuk keverék-vetületeknek. Eckert I. vetülete készült ilyen módon a négyzetes hengervetület és Donis-féle vetület átlagolásával (Györffy, 2012), később pedig Eckert III. a négyzetes henger és Apianus II. vetületének átlagolásával (Stegen, 1998). Később napvilágot látott Eckert V., és Winkel vetülete, ez utóbbi az egyéb képzetes vetületekhez tartozik.

2.4. Összetett vetületek

A képzetes hengervetületek paralelkörei párhuzamos egyenesek, és felmerül a kérdés, miért nem illesztünk össze egyszerűen két különböző hengervetületet egy adott hosszúsági kör mentén. Ezen megoldás eredményét összetett vetületnek nevezzük. Az összetett vetületeket általában három sávra osztjuk, egy egyenlítői sávra, amely középvonala az egyenlítő, és kettő sávot a két pólus és az egyenlítői sáv között. Ezekből következik, hogy a vetületnek nem lesz egész területre használható vetületi egyenlete, hanem több, feltételekkel elválasztott egyenletek rendszere áll elő.

2.4.1. Goode-vetület

1906-ban J. Paul Goode amerikai térképész a szinuszosidális vetület érdekes módosítását készítette el, több középmeridiánt vett fel, és osztotta fel összeálló egységekre a vetületet (Snyder, 1987). Aztán 1925-ben

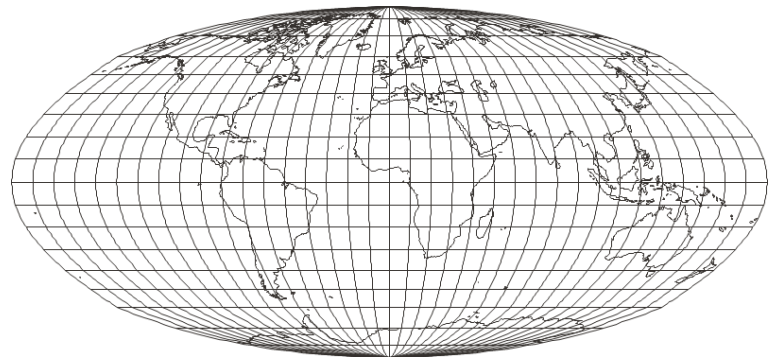


3. ábra: Goode-vetület
forrás: Gede Máttyás (2004)

kipróbálta, hogy a szinuszosidális vetület mellett a sarkok helyén Mollweide vetületét alkalmazta $\pm 40,7367^\circ$ -tól, amely szélesség mentén a Mollweidevetület hossztartó, így csökkentve a sarkok menti erős torzulást (Györffy, 2012). A megadott szélességeken tehát a Mercator-Sanson vetület szinuszive találkozik a Mollweide ellipszisívével úgy, hogy a meridiánívek folytonosak ugyan, de nem differenciálhatóak, észrevehetően megtörnek.

2.4.2. Érdi-Krausz-vetület

Érdi-Krausz György Goode ötletét felhasználva alkotta meg saját, továbbfejlesztett vetületét, amit 1968-ban publikált. Wagner-transzformációval, a területtartást meghagyó speciális fokhálózati átszámolással, amely a meridiánok és paralellkörök



4. ábra: Érdi-Krausz-vetület
forrás: Gede Máttyás (2004)

ívének jellegét megtartja, további Mercator-Sanson és Mollweide jellegű vetületek gyárthatóak. Érdi-Krausz a $\pm 60^\circ$ és $\pm 70^\circ$ szélességeken illesztette össze a Mollweidevetület és Mercator-sor megfelelő tagjait. A csatlakozó meridiánívek továbbra is (körülbelül 10° -os szögben) megtörnek, de kevésbé mint Goode-nál. Ezt a kézzel rajzolt világtérképeknél a rajzoló „lecsalták”, lekerekített ívet rajzolva. Juhász Péter illetve Gede Máttyás más-más módon a vetületen tovább dolgozva igyekeztek megoldani a törésmentes illesztést (Juhász, 2003 és Gede, 2004).

3. A Baranyi-vetületek

3.1. A Baranyi-vetületek általános ismertetői

Baranyi célja olyan vetületek létrehozása volt, amelyek a kontinensek alakjait és közelítőleg a méretüket hivatottak minél jobban megőrizni. A vetületek szerkesztési eljárás alapulnak, vagyis Baranyi nem a vetületi egyenletüket adta meg, hanem szerkesztési utasításokat a kontúrvonal és a fokhálózat megrajzolásához. Ez az 1960-as években célszerű és egyszerű volt a világtérképek szerkesztése során, ugyanis a rajzoló a szerkesztési utasítások alapján megrajzolta a fokhálózat rácshálóját (Baranyi & Karsay, 1971), majd közelítőleg megrajzolta a partvonalakat a rácsháló segítségével. Ez a mai digitális világban viszont elavult, ugyanis a vetületeket a számítógépekbe kizárólag matematikai egyenletekkel visszük be. Ezért is fontos ezen egyenletek meghatározása, hogy ezzel a Baranyi-vetületek a digitális térképészetben használható geokartográfiai vetületek körét bővítsék.

A publikációban Baranyi kijelenti: „Nem fogadható el feltétel nélkül az a megállapítás, hogy a vetülettan matematikai tudományág” (Baranyi, 1968). Ezzel arra célzott, hogy a vetülettan matematikája csak eszköz ahhoz a célhoz, amely a kívánt módszerrel jeleníti meg a Földet. Ezzel a megállapítással megfordította az addig bevett szokást, miszerint a vetületi egyenletekkel, azok módosítgatásaival próbálták a kapott eredményt felhasználni, Baranyi esetében a megszerkesztett vetülethez kell a matematikát igazítani. A vetületeket az emberi esztétika, a kívánt kiemelések vagy háttérbe szorítások vezérelték, függetlenül attól, hogy milyen matematikai módszerekkel lehet kivitelezni.

A Baranyi-vetületek összetett képzetes hengervetületek; és bár alkotójuk nem ebből a célból hozta létre őket, a matematikai leírás során az összetett vetületeket kell alapul venni. A szerkesztés alapja az Egyenlítő és a középmeridián képeinek megszerkesztése, ezután a kontúrvonal megrajzolása, majd a meridiánok és a paralellkörök behúzása szerkesztési utasítás alapján. A vetületek legfontosabb paraméterei az Egyenlítő és a középmeridián térképi hossza, illetve ezek aránya. Baranyi szerint az összképet ez az arány, valamint a meridiánok és a paralellkörök osztásköze határozza meg. A vetületek kirívóan szokatlan tulajdonsága az, hogy az osztásközök távolságát Baranyi teljesen önkényesen jelölte ki. Célja ezzel az volt, hogy az ábrázolás szempontjából kevésbé fontos, vagyis többségében óceáni területekre szoruljon a legtöbb területi és alaki torzulás.

Véleménye szerint a „lényegtelen” területek a sarkkörök és a sarkok közti területek, illetve a nyugati 130° és 170° , valamint a keleti 150° és nyugati 170° meridiánok közti sávok (Baranyi, 1968). A sávok asszimetriájának oka az, hogy Baranyi a vetületi középpontot a é. sz. 0° , k. h. 10° pontra tette, mivel így a kontúrvonal a Bering-szoroson keresztülhaladva nem vág ketté lényeges partvonalakat. Az összkép jellegét nagyban befolyásolja a kontúrvonalak alakja, a hét vetület legszembeötlőbb különbségeit is Baranyi különböző próbálkozásai adják.

3.2. A vetületek bemutatása és a kontúregyenletek

Továbbiakban egyesével ismertetem a vetületeket, és bemutatom a Baranyi által publikált adatokat és szerkeztési utasításokat. Előtte viszont megemlítem mindazon tulajdonságokat, amelyek mindegyik vetületnél megtalálhatóak.

Baranyi a vetületeinek paramétereit milliméterben adta meg, így én is ezekkel az értékekkel dolgozom, a mértarányt később, a nyers egyenletek kiszámolása után határozom meg. Baranyi az alábbi paraméterekkel adta meg vetületeit: adott az Egyenlítő hossza (E), a középmeridián hossza (K), a pólusvonal hossza (P), ha nem póluspontos és az egyenlítői kontúr körív sugara (r_l). Ezek mellett szintén milliméterekben adott a meridiánok és paralelkörök tíz fokenként vett osztásközeinek távolsága.

Az egyenlítői sáv kontúrvonala a hét vetületnél egységesen körív, a körívek középpontjai az egyenlítő vonalán fekszenek. A paralelkörök minden vetületben párhuzamosak az egyenlítővel, és merőlegesek a középmeridiánra (k. h. 10°). Az egyenlítő és a pólusok sávjainak összetételénél a kontúrvonalak törésmentesen csatlakoznak. A csatlakozások vonala mindig egy (vagy több) szélességi kör, amelyet φ_H -val jelölök, ez jelöli ki az intervallumok határait.

Több vetületnél találhatóak olyan szakaszok és szögek, amelyek méretei geometriai úton nem vezethetők le, csak közelíteni lehet értéküket. Ezt az eljárást iterációnak nevezzük. A munka során a szelőmódszert alkalmaztam (Press et al., 1992). A módszer lényege, hogy a keresett értéket tartalmazó egyenletet úgy rendezzük, hogy egyik oldala nulla legyen, így a másik oldal mint függvény zérushelyét keressük. Ehhez egy intervallumot $[x_1;x_2]$ rendelünk, amely feltételezések szerint jól közelíti a keresett zérushelyet, de a szelőmódszer esetén nem gond, ha a zérushely nem esik bele az intervallumba.

Végül az alábbi algoritmust alkalmazzuk:

$$\text{legyen } x_3 = \frac{x_2 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

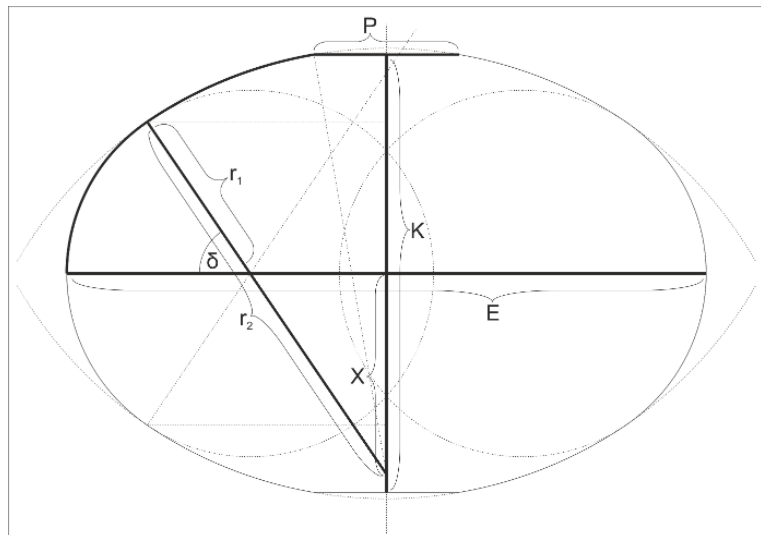
legyen $x_1 = x_2$ és $x_2 = x_3$

ha $|f(x_3)| > \varepsilon$ akkor ugrás az első lépésre, egyébként x_3 legyen a keresett zérushely. Továbbiakban iteráció esetén csupán a nullára rendezett egyenleteket fogom leírni.

Az egyes vetületek bemutatása során sematikus ábrát mutatok a kontúrvonalak szerkesztéséről és geometriájáról, végül pedig vetületenként (ha eltérő) leírom a kontúrvonalak egyenleteit.

3.2.1. Baranyi I.

A Baranyi I. vetület pólusvonalas, a pólusvonal hossza fele az egyenlítőének. A pólusok sávjainak határoló meridiánjai olyan körívek, amelyek középpontja a középmeridiánon helyezkedik el. A meridiánok osztásköze állandó, szakszóval: ekvidisztáns. Baranyi a szélességi körök közti távolságot másodrendű számtani sorozat-



5. ábra: Kontúrvonal szerkesztési elve Baranyi I. és III. vetületeknél

ként, tömören adta meg: „A szélességi körök egymástól való távolsága 10° -onként 0,5 mm-rel növekszik, a 0° és 10° közötti távolság 10 mm.”

A Baranyi által megadott adatokból X , δ és r_2 nem fejezhető ki zárt képletből, csak iterációval számítható ki az alábbi összefüggés segítségével, ami az 5. ábráról is leolvasható:

$$\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} + X\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{E}{2} - r_1\right)^2 + X^2} - r_1 = 0$$

X -et megkapva előállítható δ és r_2 :

$$\delta = \arctg\left(\frac{X}{\frac{E}{2} - r_1}\right)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} + X\right)^2}$$

A δ itt csak a határoló szélesség (φ_H) meghatározásához szükséges, de ehhez ismernünk kell a szélességi köröket leíró függvényt, amit csak később részletezek, ezért a φ_H adatokat is később adom meg.

A kontúregyenlet $\pm\varphi_H$ között:

$$x = \sqrt{r_1^2 - \left(y \cdot \frac{K}{2}\right)^2} + \frac{E}{2} - r_1$$

Az egyenlet φ_H -től északra:

$$x = \sqrt{r_2^2 - \left(y \cdot \frac{K}{2} + X\right)^2}$$

Az egyenlet $-\varphi_H$ -től délre:

$$x = \sqrt{r_2^2 - \left(y \cdot \frac{K}{2} - X\right)^2}$$

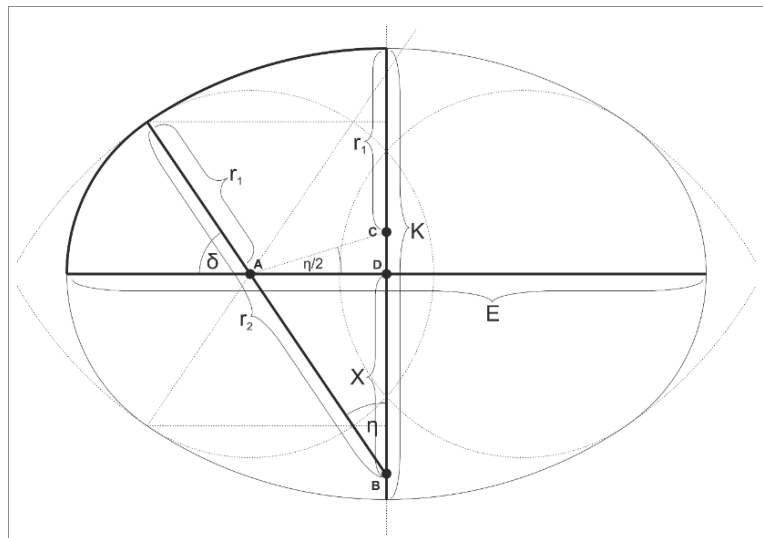
3.2.2. Baranyi II.

A pólusok sávjainak kontúrjai körívek, amelyek a póluspontokon is törésmentesen átfutnak, így a teljes vetület kontúrja törésmentes. A meridiánok ekvidisztánsak, a parallelkörök közti távolságot pedig szintén másodrendű számtani sorozattal adta meg Baranyi, az elsőtől eltérően a 10° -onkénti növekmény a másodikban 1 mm.

Baranyi és Karsay elkezdte, majd Györffy befejezte az egyenletek kiszámolását, viszont Baranyi a 80-as évek végére a vetület alapvető tulajdonságainak leírását eltérően adta meg az 1968-ban publikáltakhoz képest. Az eltérés a régebbi publikációtól az, hogy r_1 helyett φ_H értékét adta meg, amely pontosan 70° . Mivel van olyan vetület, amely kontúrvonalai sémájukban megegyeznek a II. vetülettel, ezért úgy döntöttem, hogy az eredeti leírás alapján számolom ki a II. vetület egyenleteit.

Baranyi II. vetületét a 70-es évektől kezdve használja a magyar atlasztérképészet, főleg történelmi témájú világtérképeken. A Cartographia Kft. által 2000-ben kiadott Képes történelmi atlaszban található példa a vetület alkalmazására. Érdekesség, hogy az atlaszban szereplő példák némelyikénél a d. sz. 60° -tól délre eső területeket levágták.

A további adatok kiszámolásához vegyünk egy háromszöget (6. ábra), amelyek csúcsai a következők: az r_1 sugarú kör középpontja (A), az északi póluson áthaladó r_2 sugarú kör középpontja (B), valamint az északi pólustól r_1 távolságra fekvő pont a középmeridiánon (C). Kapunk egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek η a csúcs-



6. ábra: Kontúrvonal szerkesztési elve Baranyi II., IV. és VII. vetületeknél

szöge (δ pótszöge), és szárai r_2 és r_1 különbségei. Nevezzük α -nak az AC szakasz és az Egyenlítő által bezárt szöget. Erre felírható az alábbi összefüggés:

$$\alpha + \delta = \frac{90^\circ + \delta}{2}$$

Amit ha átrendezünk, megkapjuk:

$$\alpha = \frac{\eta}{2}$$

Nevezzük vetületi középpontot D -nek és felírhatjuk a következőt:

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{K}{2} - r_1}{\frac{E}{2} - r_1}$$

Ebből már kifejezhető δ , illetve másik két fontos keresett érték, r_2 és X :

$$\delta = 90^\circ - 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{K}{2} - r_1}{\frac{E}{2} - r_1} \right)$$

$$X = \operatorname{tg}(\delta) \cdot \frac{E}{2} - r_1$$

$$r_2 = \frac{K}{2} + X$$

Ez a módszer használandó a IV. és VII. vetületeknél is.

Bár a kontúrvonalak alakja különbözik az I.-től, a kontúr egyenletei megegyeznek az I. vetületnél leírtakkal (csupán az értékek mások). A különbség az, hogy $y = \pm \frac{K}{2}$ esetén $x = 0$ értéket kapunk, ezért nincs pólusvonal, és haladnak át törés nélkül a pólusokon. Ennek köszönhetően az I. vetületnél leírt egyenletek alakjaiban megegyeznek a többivel, az V. és VI. vetület kivételével.

3.2.3. Baranyi III.

A Baranyi III. vetület az I.-höz hasonlóan pólusvonalas, illetve a pólusok sávjában a kontúrvonal körív, amely középpontja a középmeridiánon helyezkedik el. Baranyi cikkében a szöveg szerint a pólusvonal az Egyenlítő képének kétharmadát teszi ki, míg a közzétett ábrán jól láthatóan az egyharmadát. Mivel Baranyi elsősorban vizuálisan konstruálta meg vetületeit, és csak később foglalta össze írásban a módszereket, valamint a szerkesztőségénél bárki számára feltűnő lett volna ilyen képi hiba elkövetése, úgy vettem, hogy a szöveg hibás. Tehát a pólusvonal az egyenlítő harmada. A III. vetületben és tulajdonképpen az következő összes vetületben a meridiánok és a parallelkörök közti távolság nem állandó, és nem is írható le számtani sorozattal.

A megadott adatokból X , δ és r_2 a III.-nál sem fejezhető ki zárt képletből, szintén iterációval számítható ki az I.-nél használt képlet segítségével. A kontúregyenlet alakja megegyezik az I.-nél használttal, csupán más értékekkel és más határoló szélességgel.

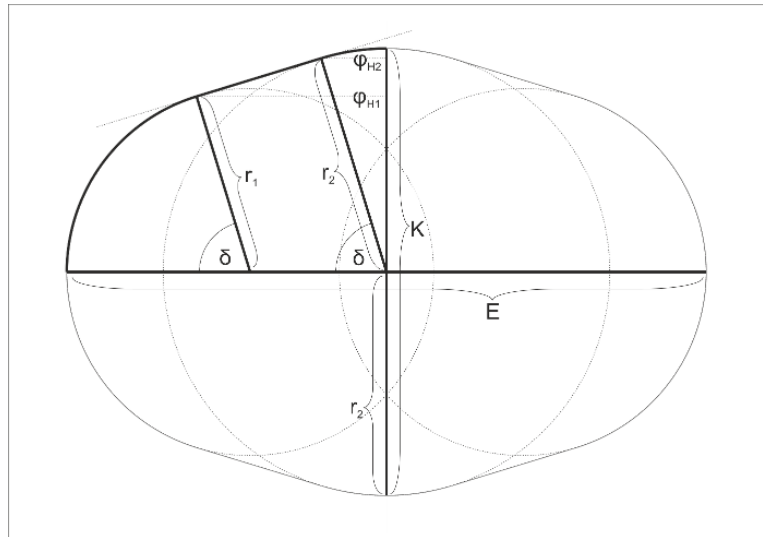
3.2.4. Baranyi IV.

Baranyi IV. vetülete a legismertebb és legkedveltebb vetület. A Kartográfiai Vállalat, majd később a Cartographia Kft. gyakorta használt vetülete, főként atlaszokban. Ebből kifolyólag Baranyi és Györffy 1989-ben meghatározta a vetület egyenleteit. Márton Mátyás Baranyi beleegyezésével, és Györffy segítségével több lépésben továbbfejlesztette a IV. vetületet, úgy hogy az óceánok ábrázolására alkalmazhassák, ez az osztott Baranyi-vetület (Györffy & Márton, 2004).

A vetület kontúrja hasonló a másodikhoz, a pólusok menti körívekből álló kontúrvonal törésmentesen halad át a pólusponton. Az egyenlítő jelentősen hosszabb a középmeridiánnál, mint a II. vetület esetében, így szembevetően kedvezőbbek a torzulások a sarkok közelében. A vetület kontúregyenletei megegyeznek a II. vetületnél leírtakkal, csak értékeikben különböznek.

3.2.5. Baranyi V.

Baranyi V. vetülete többszörösen összetett vetület. A kontúrvonal szerkesztési eljárása alapján először az egyenlítő menti sáv körívjét mérjük fel, utána a vetületi középpontból a középmeridián felével megegyező sugarú körívet mérünk fel, amely áthalad a pólusokon, végül a két körhöz érintő egyenest húzva alkotjuk meg a köztes



7. ábra: Kontúrvonal szerkesztési elve Baranyi V. vetületnél

sáv kontúrját. A vetület kontúrvonala zárt, az egyenes kontúr érintő jellege miatt mindenhol törésmentes. A vetület inkább a kontúrvonalakkal való kísérletezés eredménye,

az egyenlítői sáv kontúrja és az érintő egyenes találkozása közelében a 80° paralelkör azt az illúziót kelti, mintha az egyenes „behorpadna”. Ezzel együtt szélső két sávban a határoló meridiánok és a középmeridián környékén szembetűnően nagyok a torzulások.

A különleges kontúrvonal egyenletéhez csak a δ szükséges, ugyanis r_2 az a középpont és a pólus távolsága, vagyis K fele, X pedig ez esetben 0. Egyszerűen kifejezhetjük δ -t a szinusz-tétel segítségével az alábbi módon:

$$\delta = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{r_2 - r_1}{\frac{E}{2} - r_1}\right)$$

Mivel a vetület öt sáv összetétele, ezért két különböző értékű határoló szélességet kell megadni. Az egyenlítői sáv határa $\pm\varphi_{H1}$, a pólusoké pedig $\pm\varphi_{H2}$.

A kontúregyenlet $\pm\varphi_{H1}$ között:

$$x = \sqrt{r_1^2 - \left(y \cdot \frac{K}{2}\right)^2} + \frac{E}{2} - r_1$$

A kontúregyenlet φ_{H1} és φ_{H2} között:

$$x = \operatorname{tg} \delta \cdot \left(\frac{r_2}{\sin \delta} - y \cdot \frac{K}{2}\right)$$

A kontúregyenlet $-\varphi_{H1}$ és $-\varphi_{H2}$ között:

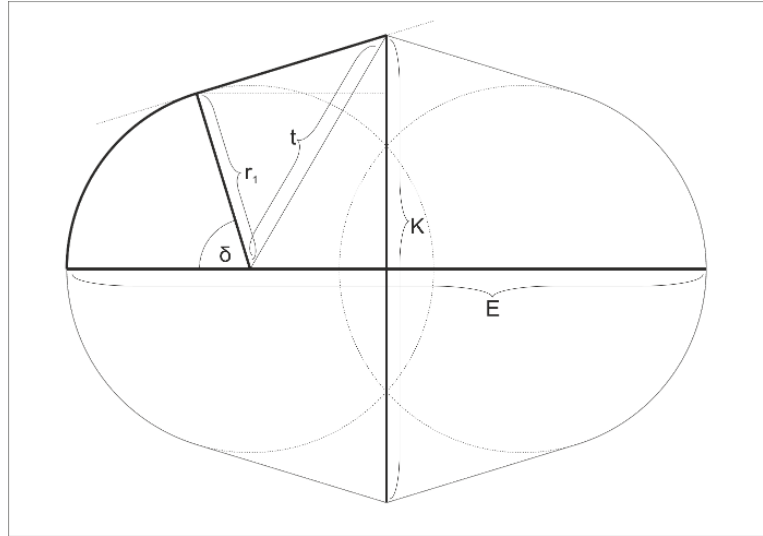
$$x = \operatorname{tg} \delta \cdot \left(\frac{r_2}{\sin \delta} + y \cdot \frac{K}{2}\right)$$

A kontúregyenlet φ_{H2} -től északra, illetve $-\varphi_{H2}$ -től délre:

$$x = \sqrt{r_2^2 - (y - r_2)^2}$$

3.2.6. Baranyi VI.

Baranyi VI. vetülete kitűnik a többi közül, ugyanis a pólusok menti kontúrvonal egyenes, amely a pólusokból indul ki, és érinti az egyenlítő menti sáv körívjét. A kontúrvonal tehát a pólusoknál megtörik. Ezzel kissé hasonlít a szinuszoidális vetületre, de könnyű megkülönböztetni tőle a közepes szélességek kedvező torzulási arányait tekintve. A



8. ábra: Kontúrvonal szerkesztési elve Baranyi VI. vetületnél

pólusok felé tartva a parallelkörök hossza gyorsan csökken, ezért egyedülállóan az szélességi körök közti távolság a pólusok felé folyamatosan növekszik.

Mivel a szélső sávok kontúrja egyenes, ezért nem beszélhetünk r_2 -ről vagy X -ről, viszont a határoló szélesség kiszámításához a δ -ra szükségünk lesz. A δ iteráció nélkül kiszámítható szinusztételhez, viszont ehhez szükségünk van még egy szakasz hosszúságára. Célszerű az egyenlítői körív középpontját és a pólust összekötő szakaszt választani, nevezzük t -nek.

$$t = \sqrt{\left(\frac{E}{2} - r_1\right)^2 + \left(\frac{K}{2}\right)^2}$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{r_1}{t}\right) + \arcsin\left(\frac{\frac{E}{2} - r_1}{t}\right)$$

A kontúregyenlet $\pm\varphi_H$ között:

$$x = \sqrt{r_1^2 - \left(y \cdot \frac{K}{2}\right)^2} + \frac{E}{2} - r_1$$

A kontúregyenlet φ_H -tól északra:

$$x = \operatorname{tg} \delta \cdot \left(\frac{K}{2} - y \cdot \frac{K}{2} \right)$$

A kontúregyenlet $-\varphi_H$ -tól délre:

$$x = \operatorname{tg} \delta \cdot \left(\frac{K}{2} + y \cdot \frac{K}{2} \right)$$

3.2.7. Baranyi VII.

A II. és IV. vetülethez hasonlóan a VII. vetület kontúrja is körív a pólusok környékén, de elődeihez képest sokkal lapultabb, és ezért nem is terjedt el használata. A vetület kontúregyenleteit a II. vetületnél adtam meg. A II. és IV. vetülettel ellentétben a VII.-nek még nincsenek megadva vetületi egyenletek, ezért volt elkerülhetetlen a három vetület stílusára vonatkozó kontúregyenletek kiszámolása.

3.3. Szélesség- és hosszúságfüggvények

Amennyiben meghatároztuk a kontúregyenleteket, tulajdonképpen megkaptuk a λ_{max} értékeket. A φ_{max} érték is adott, mivel ez a középmeridián képi hosszának fele. Most már csak vetületenként egy-egy függvényre van szükségünk, amely az origó és a maximum értékek közt felosztja a szélességi és hosszúsági köröket. A szélességfüggvénynek $\varphi = 90^\circ$ esetén 1, $\varphi = 0^\circ$ esetén 0, illetve $\varphi = -90^\circ$ esetén -1 értéket kell felvennie. A hosszúságfüggvénynek $\lambda = 180^\circ$ esetén 1, $\lambda = 0^\circ$ esetén 0, $\lambda = -180^\circ$ esetén pedig -1 értéket kell adnia. Elvárt továbbá az, hogy a függvénynek páratlannak kell lennie, vagyis az origóra középpontosan tükrösnek. Minden y értéknek csak egy x felelhet meg, ezért a függvény minden pontjában előírt a monotonitás.

A függelékben megtalálhatóak a Baranyi által előírt adatok 10° -onként a szélességekhez és hosszúságokhoz. A feladat az, hogy ezekre a pontokra illesszek függvényt, ezek matematikai kiszámítását közlöm a továbbiakban. A számítástechnikában a programok radiánban kezelik a szögeket, így az egyszerűség kedvéért radiánban számoltam ki a szögek együtthatóit, amelyet a képletekben az $arc()$ függvény jelez. A függvények formája: $f(\varphi)$ és $l(\lambda)$.

3.3.1. Egyszerű függvények

A Baranyi I. és II. vetületet leszámítva a vetületek meridiánjaira és parallelköreire nem illeszhető egyszerű folytonos függvény. Az I. és II. vetület esetében a hosszúsági körök a parallelköröket egyenlő távolságban metszik, a függvény mindkettő esetben:

$$l(\lambda) = \frac{arc(\lambda)}{\pi}$$

A két vetület szélességei pedig másodrendű számtani sorozatok, amelyre másodfokú függvény pontosan illeszkedne, ha nem lenne páros függvény. Ez kiküszöbölhető, ha a másodfokú tagot megszorozzuk a szélesség előjelével (signum függvény). Baranyi megadta a 0° és 10° közti távolságot (T), illetve a 10° -onként vett növekedés mértékét milliméterben (N). Ebből felírható a másodfokú függvény:

$$f(\varphi) = \varphi + \frac{\varphi - T}{T} \cdot \frac{\varphi}{T} \cdot N$$

A törtet egyszerűsítve, a szögeket radiánba átváltva megkapjuk a letisztult függvényt, aminek a két vetületre vonatkozó paramétereit, a kiszámolt egyenleteknél írrom le.

$$f(\varphi) = \text{sign}(\varphi) \cdot a_0 \cdot \text{arc}(\varphi)^2 + a_1 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

A többi vetületre viszont már csak közelítő függvényeket tudunk felírni, amelynek legkézenfekvőbb módszere a legkisebb négyzetek módszere.

3.3.2. Közelítő függvények

Szükségünk van egy függvényre, ami jól alkalmazható pontok közelítéséhez, megfelelően „hajlik”. Olyan függvény kell, amivel kiválóan megközelíthetők a pontok értékei, folytonos és legalább kétszeresen differenciálható, szigorúan monoton nő. Erre az exponenciális, logaritmus-, vagy polinomfüggvények alkalmasak. A Baranyi által adott pontokat megvizsgálva arra jutottam, hogy egyes vetületek fix pontjai (például a III. szélességfüggvénye, vagy az V. hosszúságfüggvénye) olyan kiugróak, hogy a polinomfüggvény használata a legalkalmasabb. Ezután kérdés a fokszám megválasztása is: ha túl kevés, akkor nem közelíti eléggé a pontokat, ha túl nagy, akkor pedig hullámszik a függvény, és nem biztos hogy monoton növekvő.

Györfly János nyomán kilencedfokú polinomfüggvényekkel közelítem a megadott pontokat. Mivel a függvény páratlan, a páros kitevőjű tagok együtthatói nullák, így a függvény az alábbi alakban írható fel.

$$f(x) = a_0x^9 + a_1x^7 + a_2x^5 + a_3x^3 + a_4x$$

3.3.3. Legkisebb négyzetek módszere

Keressük a kilencedfokú függvény a együtthatóit, mégpedig úgy, hogy a függvény a legjobban illeszkedjen a pontokra, hogy a fix pontok és a függvény ugyanazon x koordinátán vett pontjai közti távolság (reziduális) négyzetösszege a lehető legkisebb legyen (Press et al., 1992). Matematikailag leírva:

$$\sum_{i=1}^n (a_0x_i^9 + a_1x_i^7 + a_2x_i^5 + a_3x_i^3 + a_4x_i - y_i)^2 = \min$$

A függvény minimumának kiszámolásához parciálisan deriválnunk kell külön-külön az összes együttható szerint, és a derivált függvény zérushelyét kell keresni. A zárójelet felbontva, a konstansokat kiejtve és kettővel egyszerűsítve az alábbi öt egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial S_x}{\partial a_0} = \sum (a_0 x_i^{18} + a_1 x_i^{16} + a_2 x_i^{14} + a_3 x_i^{12} + a_4 x_i^{10} - x_i^9 y) = 0$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial a_1} = \sum (a_0 x_i^{16} + a_1 x_i^{14} + a_2 x_i^{12} + a_3 x_i^{10} + a_4 x_i^8 - x_i^7 y) = 0$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial a_2} = \sum (a_0 x_i^{14} + a_1 x_i^{12} + a_2 x_i^{10} + a_3 x_i^8 + a_4 x_i^6 - x_i^5 y) = 0$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial a_3} = \sum (a_0 x_i^{12} + a_1 x_i^{10} + a_2 x_i^8 + a_3 x_i^6 + a_4 x_i^4 - x_i^3 y) = 0$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial a_4} = \sum (a_0 x_i^{10} + a_1 x_i^8 + a_2 x_i^6 + a_3 x_i^4 + a_4 x_i^2 - x_i y) = 0$$

Kaptunk egy öt ismeretlent és öt egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszert. Ez mátrix alakban felírható, amelyen a Gauss–Jordan-eliminációt el lehet végezni.

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^{18} & \sum x_i^{16} & \sum x_i^{14} & \sum x_i^{12} & \sum x_i^{10} \\ \sum x_i^{16} & \sum x_i^{14} & \sum x_i^{12} & \sum x_i^{10} & \sum x_i^8 \\ \sum x_i^{14} & \sum x_i^{12} & \sum x_i^{10} & \sum x_i^8 & \sum x_i^6 \\ \sum x_i^{12} & \sum x_i^{10} & \sum x_i^8 & \sum x_i^6 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^{10} & \sum x_i^8 & \sum x_i^6 & \sum x_i^4 & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^9 y_i \\ \sum x_i^7 y_i \\ \sum x_i^5 y_i \\ \sum x_i^3 y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

3.3.4. Gauss–Jordan-elimináció

A Gauss–Jordan-eliminációt lineáris egyenletrendszerekre használjuk, az algoritmus segítségével egy n ismeretlenes n egyenletből álló rendszer ismeretlenjei kiszámolhatóak. A lineáris egyenletrendszerek esetén több lépés is megengedhető, mint például sorok cseréje, sorok skalárral való szorzása vagy sorok összeadása. Két sor megfelelő lineáris kombinációjával, skalárral szorzás és kivonás eredményeként egyes helyekre 0 érték hozható ki.

Megfelelő sorrendben alkalmazva eljutunk addig, amíg az ismeretlenek mátrixának (nevezzük A mátrixnak) főátlójában 1, a többi helyen 0 érték áll. Ebben az esetben a jobboldali (B mátrix) értékei az egyes együtthatók értékei (Press et al., 1992). Mivel ez az algoritmus teljesen automatizálható, program írható rá.

Az ismeretlenek meghatározásához írtam egy programot Java nyelven. A program egy mátrixban eltárolva tartalmazza a Baranyi által megadott szélességi és hosszúsági pontokat, csak a pozitív tartományban, mivel páros kitevőjű polinomok hiányában a függvények páratlanok lesznek, így a minimumok negatív tartományban is érvényesülnek. A program ezután ciklikusan feltölti a Gauss–Jordan-eliminációhoz szükséges B mátrixba a megadott értékek összegét, míg az A mátrixba a 0° – 90° -ig a 10° -onként vett értékek összegét radiánban, majd végrehajtja a műveleteket, és kiszámolja az együtthatókat.

Itt viszont következik egy elvi probléma. Kikötöttük, hogy az együtthatókból felírt függvény 90° -nál nem haladhatja meg 1-et, viszont mivel közelítünk, ezért legalább pár ezred különbség adódik. Ezért az együtthatókat arányosan elosztjuk úgy, hogy 90° -ra 1 értéket kapjunk. Ezt a program is végrehajtja, majd utána közli az együtthatókkal felírt kilencedfokú egyenletet, valamint a függvény által kiszámolt értékeket 10° -onként, hogy a közelítésből fakadó hibák mértékét megfigyelhessük.

3.3.5. A kiszámolt függvények

Az I. és II. vetület esetében már leírtam a pontosan illeszkedő függvényeket, viszont egy baj van a két másodfokú függvénnyel: nem differenciálhatóak kétszer. Bár a munkám szempontjából, vagyis az egyenletek meghatározása és ábrázolás során nem releváns, a további kutatásoknál, például vetületi torzulások esetén hasznos lehet, ezért kiszámoltam a két vetület közelítő kilencedfokú szélességfüggvényét. A kiszámolt függvények megtalálhatók a vetületi egyenletek leírásainál.

3.4. A sávok összeillesztése

Miután ismerjük az illesztőfüggvényeket, kiszámolhatóak azok a szélességi körök, amelyek mentén a különböző sávokat összeillesztjük. Ezek a határoló szélességek lesznek majd a vetületi egyenletek különböző darabjainak intervallumát meghatározó értékek.

Kiszámolásának a módja minden vetületnél megegyezik, mivel minden vetület egyenlítői kontúrvonalának egyenlete is paraméteresen megegyezik. Nevezzük H -nak a vetületi középpont és az összeillesztendő sávok határa közti távolságot.

Minden esetben:

$$H = r_1 \cdot \sin \delta$$

A középmeridián felének hossza lesz az $f(90^\circ)$ érték, így a kérdés az, hogy melyik az a paralellkör, amelynek szögértékét $f(\varphi)$ függvénybe behelyezve H értéket kapunk. Vagyis ez esetben iterálnunk kell:

$$f(\varphi_H) \cdot \frac{K}{2} - H = 0$$

Baranyi V. vetülete különleges eset, mivel többszörösen összetett vetület. A fenti megoldás az V. vetületnél φ_{H1} -et adja eredményül. Nevezzük H_2 -nek a pólusok közelében levő összetétel távolságát az egyenlítőtől. Itt:

$$H_2 = r_2 \cdot \sin \delta$$

$$f(\varphi_{H2}) \cdot \frac{K}{2} - H_2 = 0$$

3.5. Méretarányok

Előbbiekben leírtam a matematikai egyenleteket, amellyel a Baranyi által tervezett és kézzel rajzolt térképei megszerkeszthetők. Ahhoz viszont, hogy a vetületek bármilyen méretben előállíthatóak legyenek, valamint a kapcsolatot a vetület és a valós földfelszín között egyértelműen leírassuk, méretarányt kell megadnunk. A méretarány átlagos megfogalmazás szerint a térképi hossz és a valós hossz hányadosa. Viszont nem beszélhetünk általánosságban térképi hosszról, mivel egyetlen vetület sem hossztartó, legkevésbé pedig a geokartográfiai vetületek esetében. Így ki kell jelölnünk egy vonalat vagy területet, amelyet arányosítunk a földfelszínen vett megfelelő hosszal vagy felülettel.

A következő lehetőségeket vettem figyelembe: egyenlítői hossztartás, középmeridián menti hossztartás, az egyenlítő és a középmeridián mértani közepének aránya, illetve a vetület területe és a Föld felszínének aránya. Ezeket mind kiszámítottam, és arra jutottam, hogy az egyenlítői méretarányok között vannak a legkisebb különbségek. Ez abból adódik, hogy Baranyi 353 és 368 milliméter között választotta meg az egyenlítői hosszakat, szemben a középmeridiánnal, ami 199-től 252 milliméterig terjed.

Szintén fontos, hogy az I. és II. vetületek esetén Baranyi 360 milliméteres és ekvidisztáns egyenlítőt írt elő, ami kifejezetten a hossztartó egyenlítőért kiált. Ugyancsak fontos Baranyi célja, hogy a szárazföldre kevésbé torzuljanak, és az egyenlítő keresztülfusson fontosabb szárazföldi területeken. Nem tartottam szükségesnek, hogy a szárazföldre súlyozásából bonyolult számítások árán az egyenlítőnél hasznosabb paralelköröket találjak. Végül soron Karsay II. vetületre vonatkozó egyenletei egyenlítői méretarányal számolnak, így jó döntésnek tartom a többi is ehhez igazítani.

Tehát minden kiszámolt vetületi egyenletet egyenlítői méretarányal írok fel.

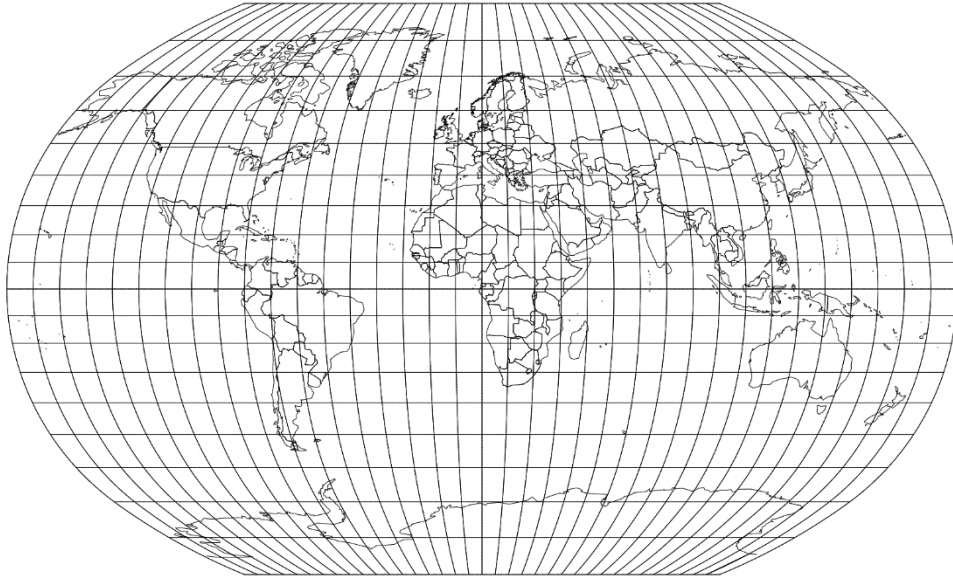
Itt fontos leszögezni, hogy a vetülettanban a vetületi gömb sugarát és a Föld sugarát is egységnek vesszük ($R=1$ és $M=1$). Mindezt azért, hogy az egyenleteket a későbbiekben egyszerűen lehessen programokba beültetni, ahol tetszőleges földszugárral és méretarányal könnyen lehessen a paramétereket állítani (Stegen, 1998).

3.6. A kiszámolt egyenletek

Most már minden adott arra, hogy leírhasam a szakdolgozat célkitűzését, a hét publikált Baranyi-vetület egyenleteit. Bár a Baranyi II. és IV. vetületek egyenletei már adóttak, én mégis leírom az általam kiszámolt egyenleteket is, mivel a VII. vetület esetében a képletekbe és a programba csak más paramétereket kellett megadnom. A vetületi egyenletek felett található az egyenletek alapján elkészített képeim (9-15. ábra)

Még egy utolsó összefoglaló az egyenletekhez:

- Az egyenleteket explicit alakban írom fel, az x és az y tengely szerint.
- Az x és y tengely matematikai értelemben veendő, vagyis x kelet felé, y észak felé mutat pozitív értékeket.
- Minden paralelkör párhuzamos, vagyis az y érték csak az $f(\varphi)$ függvénytől, és az egyenlítő-középmeridián aránytól függ.
- Az x érték függ a kontúrvonal alakjától, ami tartalmazza az $f(\varphi)$ függvényt, és függ az $l(\lambda)$ függvénytől.
- Az egyenletek egységsugarú gömb alakú Földdel, és 1:1 méretarányal számolnak.
- A határoló szélességeket fokban adom meg, így az ábrákon könnyen megfigyelhetőek a kontúrok átmenetei.
- A szélesség- és hosszúságfüggvények paramétereit 10 tizedesjegy pontossággal (a magas fokszámú polinomok miatt), a többi vetületi értéket 6 tizedesjeggyel írom le.
- Az I. és II. vetületek ábrázolásnál a másodfokú $f(\varphi)$ polinomfüggvény pontosabb, és a képek elkészítésénél is azokat használtam.
- Végül pedig minden vetületnél a középmeridián a keleti hosszúság 10° .



9. ábra: **Baranyi I.**

$$f(\varphi) = \text{sign}(\varphi) \cdot 0,075990887 \cdot \text{arc}(\varphi)^2 + 0,517253565 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

vagy közelítő függvénnyel

$$f(\varphi) = -0,0250540018 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 + 0,1957555815 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ - 0,4921336213 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,4476443476 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,5162777509 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = \frac{\text{arc}(\lambda)}{\pi}$$

$$y = f(\varphi) \cdot 1,884956$$

$|\varphi| < 70,558967^\circ$ esetén

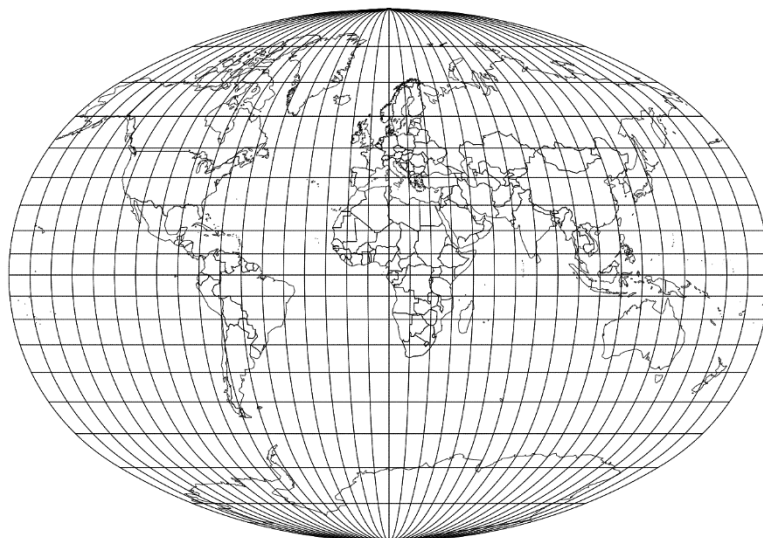
$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{3,046174 - (f(\varphi) \cdot 1,884956)^2} + 1,396263 \right)$$

$\varphi > 70,558967^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{17,139269 - (f(\varphi) \cdot 1,884956 + 1,945432)^2} \right)$$

$\varphi < -70,558967^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{17,139269 - (f(\varphi) \cdot 1,884956 - 1,945432)^2} \right)$$



10. ábra: **Baranyi II.**

$$f(\varphi) = \text{sign}(\varphi) \cdot 0,130270093 \cdot \text{arc}(\varphi)^2 + 0,431991988 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

vagy közelítő függvénnyel

$$f(\varphi) = -0,0063279693 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 + 0,0420137747 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ - 0,1075735236 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,1773996311 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,4572435839 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = \frac{\text{arc}(\lambda)}{\pi}$$

$$y = f(\varphi) \cdot 2,199115$$

$|\varphi| < 69,230288^\circ$ esetén

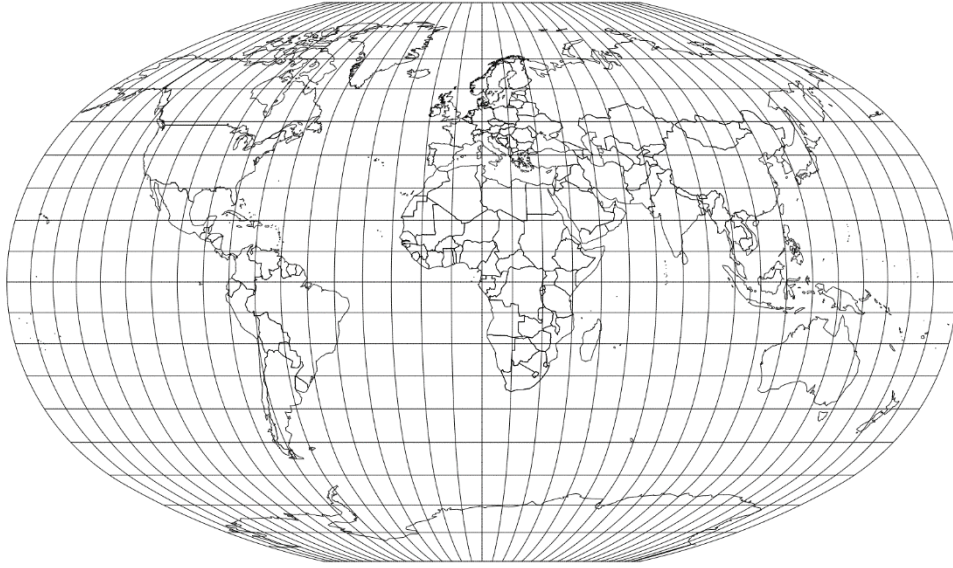
$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{3,358407 - (f(\varphi) \cdot 2,199115)^2} + 1,308997 \right)$$

$\varphi > 69,230288^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{18,951655 - (f(\varphi) \cdot 2,199115 + 2,154235)^2} \right)$$

$\varphi < -69,230288^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{18,951655 - (f(\varphi) \cdot 2,199115 - 2,154235)^2} \right)$$



11. ábra: **Baranyi III.**

$$f(\varphi) = 0,0050611069 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 - 0,0138266267 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ - 0,0213008485 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,0655077286 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,6247786983 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = 0,0000222912 \cdot \text{arc}(\lambda)^9 - 0,0005647938 \cdot \text{arc}(\lambda)^7 \\ + 0,0051026380 \cdot \text{arc}(\lambda)^5 + 0,0220124305 \cdot \text{arc}(\lambda)^3 + 0,3699964825 \cdot \text{arc}(\lambda)$$

$$y = f(\varphi) \cdot 1,843978$$

$|\varphi| < 63,01388^\circ$ esetén

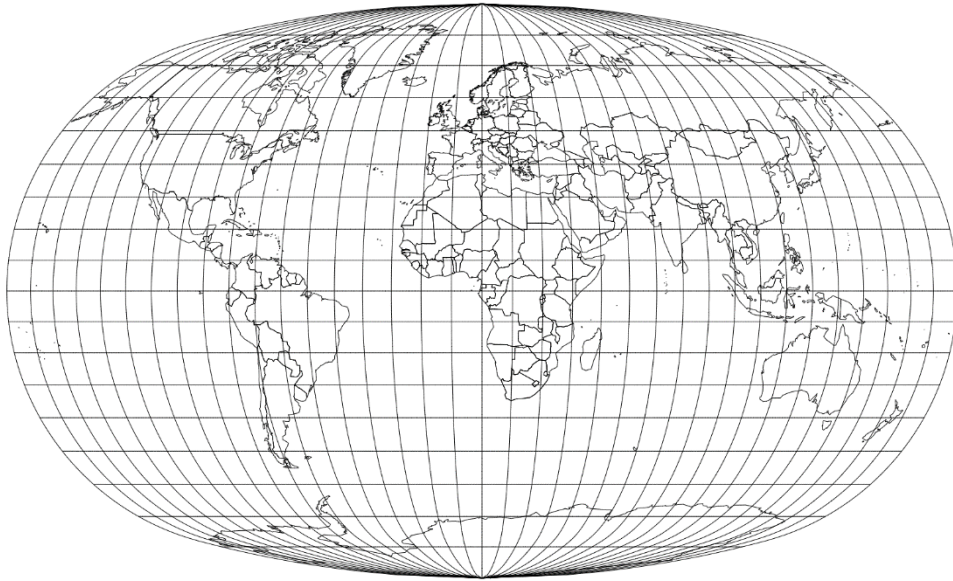
$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{2,361289 - (f(\varphi) \cdot 1,843978)^2} + 1,604944 \right)$$

$\varphi > 63,01388^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{22,961746 - (f(\varphi) \cdot 1,843978 + 2,832037)^2} \right)$$

$\varphi < -63,01388^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{22,961746 - (f(\varphi) \cdot 1,843978 - 2,832037)^2} \right)$$



12. ábra: *Baranyi IV.*

$$f(\varphi) = 0,0024623518 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 - 0,0045715112 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ - 0,0232056380 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,0592088103 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,6092112730 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = 0,0000222912 \cdot \text{arc}(\lambda)^9 - 0,0005647938 \cdot \text{arc}(\lambda)^7 \\ + 0,0051026380 \cdot \text{arc}(\lambda)^5 + 0,0220124305 \cdot \text{arc}(\lambda)^3 + 0,3699964825 \cdot \text{arc}(\lambda)$$

$$y = f(\varphi) \cdot 1,895200$$

$|\varphi| < 78,034705^\circ$ esetén

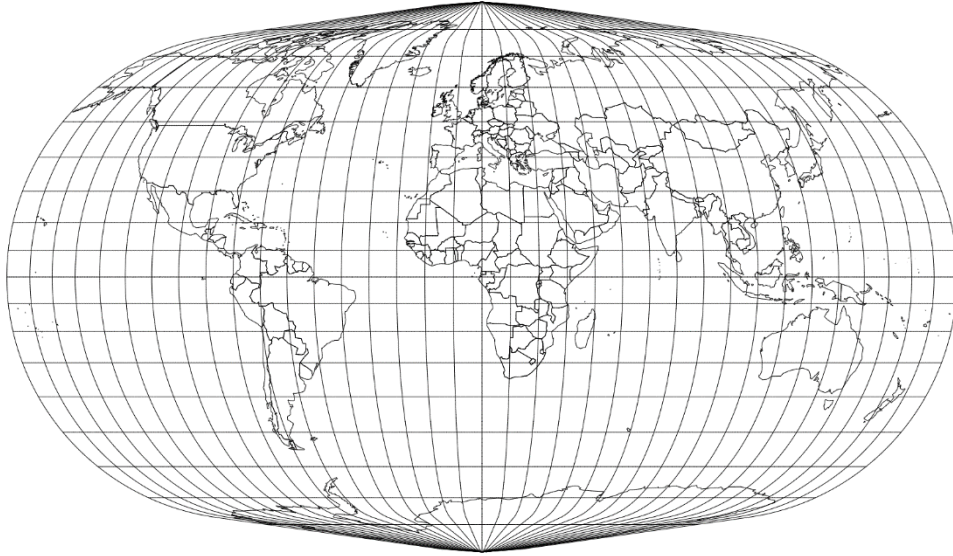
$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{2,915171 - (f(\varphi) \cdot 1,895200)^2} + 1,434205 \right)$$

$\varphi > 78,034705^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{52,959828 - (f(\varphi) \cdot 1,895200 + 5,38215)^2} \right)$$

$\varphi < -78,034705^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{52,959828 - (f(\varphi) \cdot 1,895200 + 5,38215)^2} \right)$$



13. ábra: **Baranyi V.**

$$f(\varphi) = 0,0003349036 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 + 0,0238688655 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ - 0,1379539116 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,2283705107 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,5420468017 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = 0,0000174169 \cdot \text{arc}(\lambda)^9 - 0,0004025720 \cdot \text{arc}(\lambda)^7 \\ + 0,0030188496 \cdot \text{arc}(\lambda)^5 - 0,0100793312 \cdot \text{arc}(\lambda)^3 + 0,3454927179 \cdot \text{arc}(\lambda)$$

$$y = f(\varphi) \cdot 1,815538$$

$|\varphi| < 77,214915^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{2,566229 - (f(\varphi) \cdot 1,815538)^2} + 1,539647 \right)$$

$\varphi > 77,214915^\circ$ és $\varphi < 89,138488^\circ$ esetén

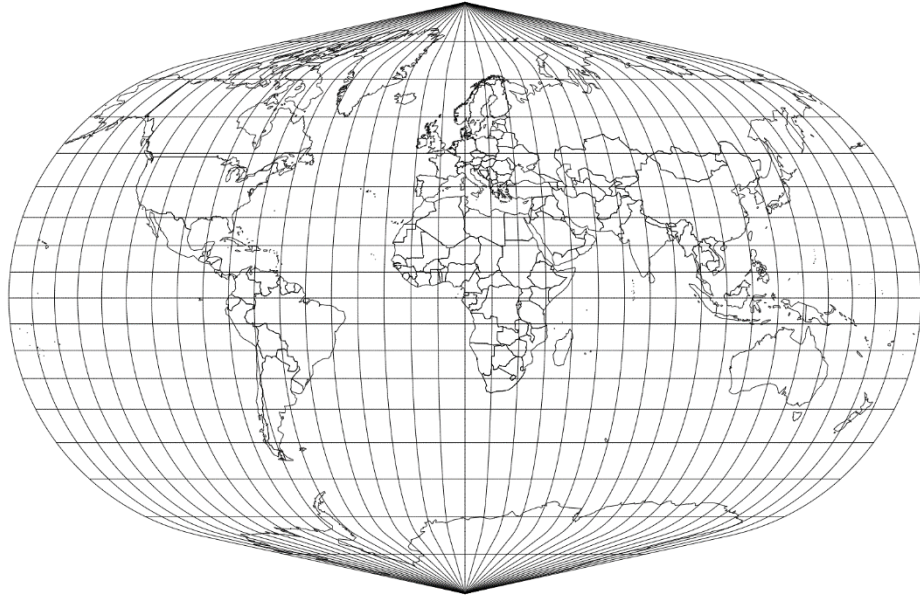
$$x = l(\lambda) \cdot (1,833265 - f(\varphi) \cdot 1,815538) \cdot 7,138632$$

$\varphi < -77,214915^\circ$ és $\varphi > -89,138488^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot (1,833265 + f(\varphi) \cdot 1,815538) \cdot 7,138632$$

$|\varphi| > 89,138488^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{3,296178 - (f(\varphi) \cdot 1,815538)^2} \right)$$



14. ábra: *Baranyi VI.*

$$f(\varphi) = 0,0062459788 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 - 0,0305975162 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ + 0,0307024080 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 + 0,0724243966 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,4991237340 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = 0,0000128588 \cdot \text{arc}(\lambda)^9 - 0,0003046250 \cdot \text{arc}(\lambda)^7 \\ + 0,0024098046 \cdot \text{arc}(\lambda)^5 - 0,0087713753 \cdot \text{arc}(\lambda)^3 + 0,3409950753 \cdot \text{arc}(\lambda)$$

$$y = f(\varphi) \cdot 2,032795$$

$|\varphi| < 75,059298^\circ$ esetén

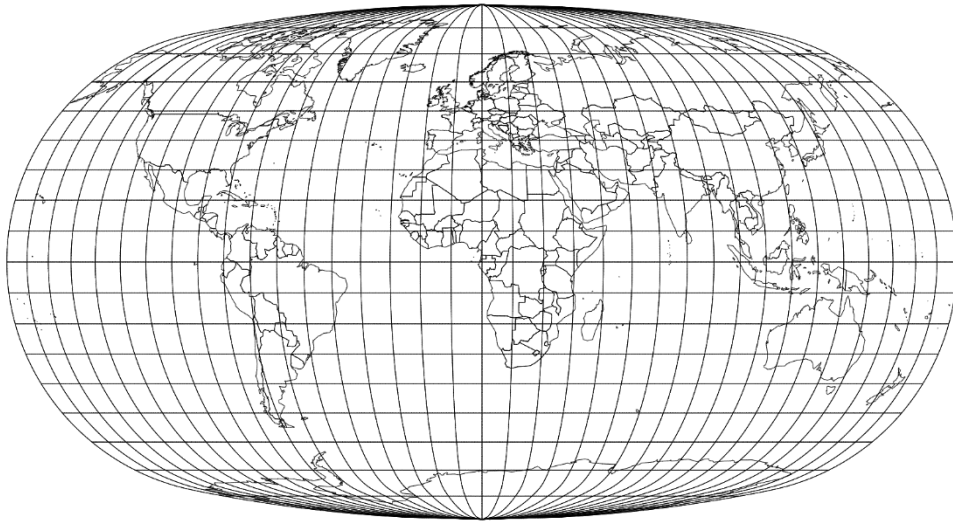
$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{2,795571 - (f(\varphi) \cdot 2,032795)^2} + 1,469597 \right)$$

$\varphi > 75,059298^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot (2,032795 - f(\varphi) \cdot 2,032795) \cdot 4,573849$$

$\varphi < -75,059298^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot (2,032795 + f(\varphi) \cdot 2,032795) \cdot 4,573849$$



15. ábra: *Baranyi VII.*

$$f(\varphi) = 0,0036630751 \cdot \text{arc}(\varphi)^9 - 0,0239743339 \cdot \text{arc}(\varphi)^7 \\ + 0,0493336334 \cdot \text{arc}(\varphi)^5 - 0,0542217534 \cdot \text{arc}(\varphi)^3 + 0,6944251440 \cdot \text{arc}(\varphi)$$

$$l(\lambda) = 0,0000139363 \cdot \text{arc}(\lambda)^9 - 0,0003920866 \cdot \text{arc}(\lambda)^7 \\ + 0,0038508387 \cdot \text{arc}(\lambda)^5 - 0,0189068356 \cdot \text{arc}(\lambda)^3 + 0,3745189502 \cdot \text{arc}(\lambda)$$

$$y = f(\varphi) \cdot 1,69885$$

$|\varphi| < 77.584363^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{2,361289 - (f(\varphi) \cdot 1,698850)^2} + 1,604944 \right)$$

$\varphi > 77.584363^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{91,355347 - (f(\varphi) \cdot 1,698850 + 7,859149)^2} \right)$$

$\varphi < -77.584363^\circ$ esetén

$$x = l(\lambda) \cdot \left(\sqrt{91,355347 - (f(\varphi) \cdot 1,698850 - 7,859149)^2} \right)$$

4. A vetületek megjelenítése HTML Canvas-ben JavaScripttel

Mivel az egyenletek meghatározása eléggé összetett feladat volt, és sok hibalehetőséget tartalmazott, szükségem volt egy felületre amelyen vizuálisan tudtam ellenőrizni az egyenletek helyességét. Eleinte különböző JavaScript nyelven írt programokban számoltam a kontúregyenleteket és az iterációkat, de később vetületenként egy-egy programba sűrítettem a számolásokat. Kivétel a szélesség és hosszúságfüggvények programja, amelyet Java nyelvben külön írtam (mivel a Gauss–Jordan-eliminációt már tanulmányaim során korábban megírtam), és a kiadott értékeket egyben másoltam be a scriptekbe.

Miután vetületenként egy-egy programot használtam, létrehoztam belőlük HTML lapokat, amelyen belül pedig létrehoztam egy-egy Canvas-t. Ez nem más, mint egy „doboz” a lapon, egy elkerített téglalap, amelyen Javascript nyelven írt utasításokkal lehet rajzolni. Maga a téglalap a `<canvas>` blokkal hozható létre, és a címkén belül állíthatóak a téglalap tulajdonságai (méret és a keret stílusa). A JavaScript kód elején definiáltam a konstansokat, utána az illesztőfüggvényeket, végül a kontúregyenleteket. Csak azokat az értékeket adtam meg, amelyeket Baranyi is megadott, a többi a programon belül vezettem le, ha szükséges volt, akkor iterálva. Ez azt eredményezte, hogy elegendő négy értéket megváltoztatni, ha módosítani szeretnénk a vetületen. Ezek után következik egy változó, amely a nagyításért felel, amelyre azért van szükség, mert egység sugarú gömbre írt vetületi egyenleteket tápláltam be a programba. Előfordulhat, hogy a közelítő függvények 1-nél nagyobb abszolútértéket is felvehetnek, ami hibát jelezhet a trigonometrikus függvényeknél a kontúregyenletekben, ezért feltételként kikötöttem, hogy minden 1-nél nagyobb értéket 1-nek vegyen. (Mindez érvényes -1 esetén is.) Ekkor következik a *fold.txt* nevű fájl betöltése, ami a Föld országhatárait durván közelítő poligonok csúcspontjait tárolja φ és λ szögértékben (fokban). A koordináták soronként találhatóak a szöveges fájlban, a poligonok bezárását 0;0 koordináta jelzi. Erre a témevezetőm által írt scriptet használtam, ami ciklusosan beolvassa a sorokat, tárolva az előző pontot is, ezeket behelyezi a vetületi egyenletek függvényébe, és ha 0;0 érték, akkor bezárja a poligont és vonal nélkül tovább áll a következőre a *moveTo()* paranccsal, egyéb esetben összeköti őket egy vonallal a *lineTo()* paranccsal. Ezt még követi a fokhálózat, amely 10° -onként végigmegy a meridiánokon és a paralelkörökön, 1° -os tördeléssel. Így ugyan a kontúrvonalak valójában nem körívként, illetve a meridiánok nem ellipszisívenként, hanem sokszöggént rajzoltatnak ki, mindez szemmel nem észrevehető, és sokkalta egyszerűbb megoldás.

Mindegyik programot CD-n csatolom *baranyi_[arab sorszám].html* néven. Mellettük csatolom a *fold.txt* nevű fájlt. Fontos, hogy a HTML fájlok csak akkor töltik be a szöveges fájl adatait, ha egy mappában szerepelnek. Amennyiben a HTML otthoni gépen fut, csak a Mozilla Firefox böngésző képes betölteni a *fold.txt*-t, ha szerveren fut, akkor az egyéb böngészők is betöltik. Ezt a *XMLHttpRequest()* függvény okozza, amely elvárja, hogy a betöltendő fájl egy szerveren tartózkodjon a programmal, és a Mozilla ezt szerver nélkül is megoldja.

Csatolom továbbá a *Baranyi.java* program forráskódját, amely az illesztőfüggvények együttthatóit számolta ki.

5. Összefoglalás

Munkám során sikerült öt új vetülettel kibővíteni a digitális térképészetben használható vetületek számát. Ehhez persze szükséges majd egyéb szoftverekbe vagy internetes megjelenítőkbe beilleszteni, hogy gyakorlatban is alkalmazni lehessen őket. Szintén célszerű későbbiekben a vetületi torzulásaikat vizsgálni, hogy a megfelelő területek megfelelő adatábrázolásai során – matematikailag bizonyítva a jó torzulási viszonyokat – a kívánatos lehetőségek között szerepelhessenek. Az illesztőfüggvények esetében szem előtt tartottam, hogy alkalmasak legyenek a torzulások vizsgálatára. A vetületi egyenletek megalkotása során új matematikai ismereteket sajátítottam el, amelyeket programba ültettem, és sikeresen meg is jelenítettem a többnyire általam írt környezetben. Külön öröm volt az egyes kontúrvonalak sikeres leírása, amelyre nem volt precedens, és teljesen önálló gondolkodásra és problémamegoldásra készítetett.

Leírtam továbbá Baranyi II. és IV. vetületének saját programjaim által kiszámolt vetületi egyenleteit is. Későbbiekben hasznos lehet az összevetésük a már meglévő egyenletekkel.

Végül pedig úgy vélem, hogy általános képet adtam az összetett vetületek matematikai leírásának módszereiről, Baranyi szemléletmódjáról és ötleteiről, így továbbiakban jó alapul szolgálhat az egyéb Baranyi-vetületek leírásához, vagy akár új, hasonló elvű vetületek létrehozásához.

Függelékek

Az alábbi táblázatokban megtalálhatók azok az értékek amelyet Baranyi megadott, illetve az egyszerű levezetett értékeket. A szögek fokban, a hosszak milliméterben értendők.

Megadott értékek							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
E	360	360	368	368	353	357	368
K	216	252	216	222	204	231	199
P	180	-	122,6667	-	-	-	-
r1	100	105	90	100	90	95	90

Levezetett értékek							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
r2	237,2022	249,4286	280,6535	426,2273	102	-	559,8026
X	111,4650	123,4286	165,8697	315,2273	-	-	460,3026
δ	54,3325°	58,7155°	60,4593°	75,0789°	82,0257°	77,6672°	78,4581°

Szélességek 10°-onkénti különbségei (n és n-10° különbsége)							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
10°	10	10	12	12	10	10	12
20°	10,5	11	12	12	10,5	10,5	12
30°	11	12	12	12	11	11	11,5
40°	11,5	13	13	13	12,5	12	11,5
50°	12	14	13	13	14	13	11,5
60°	12,5	15	13	13	12,5	14	11
70°	13	16	11	12	11	14,5	11
80°	13,5	17	11	12	10,5	15	10
90°	14	18	11	12	10	15,5	9

Szélességek 10°-onkénti távolsága az 0°-tól							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
10°	10	10	12	12	10	10	12
20°	20,5	21	24	24	20,5	20,5	24
30°	31,5	33	36	36	31,5	31,5	35,5
40°	43	46	49	49	44	43,5	47
50°	57	60	62	62	58	56,5	58,5
60°	69,5	75	75	75	70,5	70,5	69,5
70°	72,5	91	86	87	81,5	85,5	80,5
80°	86	108	97	99	92	100	90,5
90°	100	126	108	111	102	111,5	99,5

Hosszúságok 10°-onkénti különbségei (n és n-10° különbsége)							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
10°	10	10	12	12	10,5	10,5	12
20°	10	10	12	12	10,5	10,5	12
30°	10	10	11	11	10,5	10,5	11,5
40°	10	10	11	11	10,5	10,5	11,5
50°	10	10	11	11	10,5	10,5	11
60°	10	10	11	11	10	10	11
70°	10	10	10	10	10	10	10,5
80°	10	10	10	10	10	10	10,5
90°	10	10	10	10	10	10	10
100°	10	10	10	10	10	10	10
110°	10	10	10	10	10	10	10
120°	10	10	10	10	10	10	10
130°	10	10	10	10	10	10	10
140°	10	10	10	10	10	10	10
150°	10	10	9	9	8,5	9	9
160°	10	10	9	9	8,5	9	9
170°	10	10	9	9	8,5	9	8
180°	10	10	9	9	8,5	9	8

Hosszúságok 10°-onkénti távolsága az 0°-tól							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
10°	10	10	12	12	10,5	10,5	12
20°	20	20	24	24	21	21	24
30°	30	30	35	35	31,5	31,5	35,5
40°	40	40	46	46	42	42	47
50°	50	50	57	57	52,5	52,5	58
60°	60	60	68	68	62,5	62,5	69
70°	70	70	78	78	72,5	72,5	79,5
80°	80	80	88	88	82,5	82,5	90
90°	90	90	98	98	92,5	92,5	100
100°	100	100	108	108	102,5	102,5	110
110°	110	110	118	118	112,5	112,5	120
120°	120	120	128	128	122,5	122,5	130
130°	130	130	138	138	132,5	132,5	140
140°	140	140	148	148	142,5	142,5	150
150°	150	150	157	157	151	151,5	159
160°	160	160	166	166	159,5	160,5	168
170°	170	170	175	175	168	169,5	176
180°	180	180	184	184	176,5	178,5	184

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Gede Mátyásnak, aki mindig türelmesen és segítőkészen fogadott, egyszerűen és lényegretörően magyarázott, nagy teret engedett a képzeletemnek, amit igyekezett jó irányba terelni.

Hatalmas köszönet illeti a téma másik két ötletgazdáját Györffy Jánost, és Kerkovits Krisztiánt. Györffy Jánosnak köszönöm a nagy háttéranyagot, amit rám bízott, és köszönöm, hogy megismertette velem Baranyi életútját, vetületeinek történetét. Kerkovits Krisztiánnak köszönöm a matematikai módszerek megismertetését, és a sok forrást, ami elengedhetetlen volt a téma megalapozásához.

Továbbá köszönettel tartozom édesanyámnak, Szedlák Krisztinának, aki nagy segítséget nyújtott a téma logikus felépítésében, valamint a munka fogalmazási és nyelvtani nehézségeiben. Ugyancsak köszönöm édesapám, Zelenka Zoltán segítségét a szövegszerkesztésben és a kinézetben. És köszönet illeti Pál Mártont, aki a szakdolgozat formai követelményeiben volt segítségemre.

Irodalomjegyzék

Baranyi János (1968): *A világvetületek és az alakhűség*, Geodézia és Kartográfia v. 20, no. 4, old.: 285-286

Baranyi János és Karsay Ferenc (1971): *Alakhűbb világtérkép-vetületek*, Geodézia és Kartográfia v. 23, no. 2, old.: 108-114

Baranyi János és Györffy János (1990): *A Föld újszerű ábrázolásai a mai magyar atlaszokban*, Földrajzi Közlemények v. 114, no. 3-4, old.: 109-117

Gede Mátyás (2004): *Az Érdi-Krausz-féle vetület módosítása és általánosítása* (Diplomamunka), Budapest, ELTE Térképtudományi Tanszék

Györffy János és Márton Mátyás (2004): *Óceánok térképi ábrázolása Baranyi IV. vetületének osztott változatában*, Geodézia és Kartográfia v. 56, no. 1, old.: 7-11

Györffy János (2012): *Térképészet és geoinformatika II. – Térképvetületek* (old.: 18, 26, 77, 176, 185, 200), Budapest, Eötvös Kiadó

Juhász Péter (2003): *Az Érdi-Krausz vetület javítása*, Geodézia és Kartográfia v. 55, no. 6, old.: 13-19

Press, William H., Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T., Flannery, Brian P. (1992): *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing – Second Edition* (old.: 36-41, 354-357, 671-675) New York, Cambridge University Press

Snyder, John P. (1987): *Map Projections – A Working Manual* (old.: 243-253), Washington, U.S. Government Printing Office

Stegena Lajos (1998): *Vetülettan* (old.: 74, 154), Budapest, Tankönyvkiadó

Nyilatkozat

Alulírott, Zelenka Balázs nyilatkozom, hogy jelen szakdolgozatom teljes egészében saját, önálló szellemi termékem. A szakdolgozatot sem részben, sem egészében semmilyen más felsőfokú oktatási vagy egyéb intézménybe nem nyújtottam be. A szakdolgozatomban felhasznált, szerzői joggal védett anyagokra vonatkozó engedély a mellékletben megtalálható.

A témavezető által benyújtásra elfogadott szakdolgozat PDF formátumban való elektronikus publikálásához a tanszéki honlapon

HOZZÁJÁRULOK

NEM JÁRULOK HOZZÁ

Budapest, 2018. május 15.

.....
a hallgató aláírása